

LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN

VON DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DRESDEN

AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER THEORETISCHEN ELEKTROTECHNIK

2. LEHRBRIEF



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER THEORETISCHEN ELEKTROTECHNIK

2. LEHRBRIEF

Nach der Vorlesung
von Dr. phil. **Georg Mierdel**
o. Professor und Direktor
des Institutes für Allgemeine Elektrotechnik
an der Technischen Hochschule Dresden

bearbeitet für das Fernstudium
von Dipl.-Ing. **Edgar Drechsler**
wissenschaftlicher Mitarbeiter
der Hauptabteilung Fernstudium
der Technischen Hochschule Dresden



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN · 1961

VT-Bestell-Nr. 9 248/2 · Auflage 600 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/49/61/DDR.
Verfaßt für die Hauptabteilung Fern- und Abendstudium der Technischen Hochschule Dresden · Heraus-
gegeben im Auftrag des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen
Republik von der Technischen Hochschule Dresden · Verlag und Vertrieb: VEB Verlag Technik, Berlin
Im Offsetdruck hergestellt bei VVB Druck Reprocolor (III/18/6), Leipzig C 1, Teubnerstraße 11

2. Kapitel: Statistik und Rauschen

[10] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

1. Das Wesen von Schwankungserscheinungen. Die Materie und auch die elektrischen Ladungen bestehen aus einer Vielzahl sehr kleiner Quanten (Atome bzw. Ionen und Elektronen). Mit makroskopischen Meßinstrumenten lassen sich stets nur die Mittelwerte aus sehr vielen Einzelprozessen beobachten. Schwankungen der beobachteten Größen um diese Mittelwerte kann man erst dann feststellen, wenn man zu immer feineren Meßmethoden übergeht. Einige Beispiele mögen das Wesen der Schwankungseffekte veranschaulichen.

a) Bevölkerungsstatistischen Unterlagen ist zu entnehmen, daß in Deutschland 1938 insgesamt $Z = 1\,506\,340$ Kinder geboren wurden. Das tägliche Mittel betrug also $Z/365 = 4127$. Das bedeutet jedoch nicht, daß nun tatsächlich pro Tag 4127 Kinder geboren wurden. Vielmehr treten von Tag zu Tag Schwankungen auf, also beispielsweise 4036, 4347, 4402, 3892 usw.

b) Bei verkehrsstatistischen Erhebungen werden an einem beliebigen Tag mittags zwischen 12⁰⁰ und 13⁰⁰ Uhr Personen gezählt, die ein bestimmtes Verkehrszentrum passieren. Es versteht sich, daß an anderen Tagen um dieselbe Zeit nicht dieselbe Zahl registriert wird. Auch hier erscheinen Schwankungen, und die Mittelwertbildung ist nur über einen größeren (theoretisch unendlich großen) Zeitraum möglich. In diesem speziellen Beispiel kommt noch hinzu, daß die Einzelpersonen durch viele fremde Faktoren, wie Wetter, Arbeitszeit, Einkaufsmöglichkeiten u.ä. beeinflusst werden.

c) Physikalische Prozesse, namentlich die Kernprozesse, sind frei von solchen schwer erfaßbaren Einflüssen. Die Zählung der aus einem radioaktiven Präparat je s ausgestoßenen α -Teilchen ist durch Szintillation oder mit dem Geiger-Müller-Zählrohr möglich. Das Ergebnis derartiger Beobachtungen sind Meßwerttabellen der folgenden Art.

Versuchs- Nummer	Impulse je s	Abweichung vom Mittel	Quadrat der Abweichung
m	n	$\Delta = n - \bar{n}$	$\Delta^2 = (n - \bar{n})^2$
1	21	+ 1	1
2	18	- 2	4
3	25	+ 5	25
4	16	- 4	16
5	20	0	0
6	22	+ 2	4
7	26	+ 6	36
8	13	- 7	49
9	24	+ 4	16
10	15	- 5	25
$m = 10$	$\sum n = 200$	$\sum \Delta = 0$	$\sum \Delta^2 = 176$
	$\bar{n} = \frac{\sum n}{m} = 20$		

Aus der Summe der Schwankungsquadrate $\sum \Delta^2$ folgt der Mittelwert der Schwankungsquadrate

$$\overline{\Delta^2} = \frac{\sum \Delta^2}{m} = 17,6$$

Das Quadrat der relativen Schwankung beträgt also

$$\delta^2 = \frac{\overline{\Delta^2}}{\bar{n}^2} = \frac{17,6}{400} = 0,044$$

2. Einige Grundbegriffe der mathematischen Statistik. Die Auswertung statistischer Meßreihen obiger Art führt stets auf wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen. Ihr Grundbegriff ist die mathematische Wahrscheinlichkeit, deren Definition lautet

$$W = \frac{\text{Zahl der für ein Ereignis günstigen Fälle}}{\text{Zahl der insgesamt möglichen Fälle}} = \frac{G}{M} \quad (111)$$

Beispiel: Wie groß ist im Zahlenlotto die Wahrscheinlichkeit W, daß 5, 4, 3 ... Zahlen richtig gewählt werden?

Nach der Spielregel werden von $N = 90$ Ziffern (1 bis 90)

5 „gezogen“. Vor der Ziehung hat der Spieler gleichfalls 5 Ziffern a, b, c, d, e angemerkt. Für die Realisierung eines „Fünfers“ gibt es nur 1 Möglichkeit, nämlich, daß die 5 gezogenen Ziffern mit den gewählten übereinstimmen. Folglich ist $G = 1$.

Die Zahl der möglichen Fälle ist gleich der Zahl der Kombinationen, die für 5 von insgesamt 90 Ziffern möglich ist. Jede dieser Kombinationen darf dabei natürlich nur einmal vorkommen. Es wird dann

$$M = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 44 \cdot 10^6$$

und gemäß (111)

$$W_5 = \frac{1}{44 \cdot 10^6} = 2,28 \cdot 10^{-8}$$

Unter der Annahme, daß 12,5 Millionen Spieler (mit je einem Tip) beteiligt sind, ist die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung eines Fünfers überhaupt: $12,5 \cdot 10^6 \cdot W_5 = 0,286$.

Ein gern benutztes Modell für die Demonstration der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der Würfel. Hier sind aus geometrischen Gründen alle 6 Zahlen gleich wahrscheinlich. Da die Summe aller 6 Wahrscheinlichkeiten wieder 1 ergeben muß, folgt eine Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer beliebig festgesetzten Zahl von

$$W = p = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beispielsweise mit 2 Würfeln in einem Wurf oder mit einem Würfel in 2 aufeinander folgenden Würfen stets die 6 erscheint, wird also

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = p \cdot p = p^2 = \frac{1}{36}$$

(„Sowohl-als-auch-Wahrscheinlichkeit“).

Des weiteren ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wurf nicht die 6 bringt

$$W = 1 - \frac{1}{6} = 1 - p = \frac{5}{6}$$

3. Die Bernoulliverteilung. Das Würfelmodell führt nun leicht zum Verständnis der Verteilung von Wahrscheinlichkeiten, sowie zur Aufstellung einer allgemein gültigen Formel, der sogenannten Binom- oder Bernoulliverteilung:

Wird jeder Wurf eines einzelnen Würfels als ein „Versuch“ bezeichnet, so können beispielsweise $m = 120$ Versuche aus 120 Würfeln mit einem einzigen Würfel oder aus 1 Wurf mit 120 Würfeln bestehen. Bei einer solchen Versuchsserie sollte man der mathematischen Wahrscheinlichkeit (111) entsprechend erwarten, daß

20mal die „6“ und 100mal eine andere Zahl erscheint. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß das nicht der Fall ist. Vielmehr treten bei dauernder Wiederholung der Versuchsreihe Werte auf, die unregelmäßig um die 20 herum streuen, z.B. 18, 19, 13, 20, 21, 19, 16, 15, 26 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Extremfälle (nur „6“ bzw. keine „6“) sind leicht anzugeben.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Serie von m Versuchen (z.B. $m = 120$) sämtlich die „6“ zeigt, ist nach der Produktregel

$$p^m = \left(\frac{1}{6}\right)^{120} = 4,2 \cdot 10^{-94}$$

Dafür, daß sämtliche m Versuche nicht ein einziges Mal die „6“ zeigen, ist die Wahrscheinlichkeit

$$(1 - p)^m = \left(\frac{5}{6}\right)^{120} = 3,15 \cdot 10^{-10}$$

Für Zwischenwerte (z.B. 15mal „6“ und 105mal nicht „6“) gilt die Bernoulliverteilung. Es ist dies die Wahrscheinlichkeit dafür, daß m Versuche n-mal ein bestimmtes Resultat zeigen, welches mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten ist. Für diese Wahrscheinlichkeit läßt sich schreiben:

$$P_m(n) = \binom{m}{n} p^n (1 - p)^{m-n} \quad (112a)$$

oder

$$P_m(n) = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1 - p)^{m-n} \quad (112b)$$

Der Aufbau dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion wird durch folgende Überlegungen verständlich:

Es sei eine bestimmte Reihenfolge der Ergebnisse vorgegeben. Dabei sollen von insgesamt m Versuchen die ersten n Versuche positiv und die folgenden m-n Versuche negativ ausfallen (im Bild 31 schematisch dargestellt).

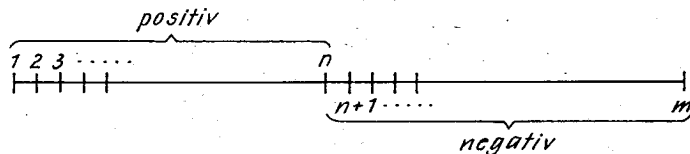


Bild 31
Zur Deutung der Bernoulliverteilung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Versuch 1 positiv ausfällt, ist p . Dafür, daß auch die Versuche 2, 3, 4 ... positiv ausfallen, ist die Wahrscheinlichkeit $p^2, p^3, p^4 \dots$. Für den positiven Ausfall der ersten n Versuche gilt daher

$$p^n$$

Die folgenden $m-n$ Versuche sollen nun aber, angefangen vom Versuch $n+1$ bis zum Versuch m , negativ ausfallen. Es folgt somit die Wahrscheinlichkeit

$$(1-p)^{m-n}$$

Nach der Multiplikationsregel ergibt sich also eine "Sowohl-als-auch"-Wahrscheinlichkeit ¹⁾ von

$$p^n (1-p)^{m-n}$$

Die eingangs geforderte Reihenfolge bedeutet aber eine starke Einschränkung für die Realisierung der günstigen Fälle, da die Versuchsergebnisse in Wirklichkeit nicht von der Reihenfolge abhängen. Ein positives oder negatives Ergebnis kann vielmehr jede Stelle zwischen den negativen oder positiven Ergebnissen einnehmen. Die Zahl der günstigsten Fälle wird dadurch um den Faktor

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

also um die Zahl der Möglichkeiten, n Elemente auf m Plätze zu verteilen, vergrößert. Damit wird aber wie oben

$$P_m(n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$

Zahlenbeispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit $m = 120$ Würfel 10mal ($n = 10$) die "6" erscheint?

Nach (112) wird mit der Einzelwahrscheinlichkeit $p = 1/6$

$$P_m(n) = P_{120}(10) = \binom{120}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{110} = 3,7 \cdot 10^{-3}$$

Die maximale Wahrscheinlichkeit würde sich für

$$n = \bar{n} = mp = \frac{120}{6} = 20$$

ergeben.

1) Vgl. Ackermann: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
S. Hirzel Verlag Leipzig 1955

Die Bernoulliverteilung liefert hierfür den Wert

$$P_{\max} = P_{120}(20) = \binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{100} = 0,097$$

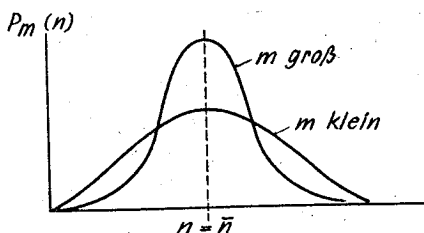


Bild 32
Verlauf der Bernoulliverteilung
für eine große oder kleine An-
zahl von Einzelversuchen

Die Verteilungskurve hat, wie
hieraus zu erkennen ist, zu bei-
den Seiten von $\bar{n}$ sehr steile
Flanken. Für eine geringere An-
zahl m von Versuchen würde die
Verteilungskurve flacher verlau-
fen (Bild 32).

Die Bernoulliverteilung gilt
allgemein und streng für beliebi-
ge Werte von n , m und p . Schwan-

kungserscheinungen mit rein physikalischem Charakter besitzen je-
doch zwei wesentliche Merkmale, nämlich

$$m \gg n \quad (113a)$$

und

$$p = \frac{\bar{n}}{m} \ll 1 \quad (113b)$$

So ist z.B. beim Zerfall eines radioaktiven Präparates die Zahl
der Atome, die zur Zeit t noch nicht zerfallen sind:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (114)$$

Dieses allgemein gültige Zerfallsgesetz ist im Bild 33 grafisch
dargestellt. In vielen Fällen wird
nicht die Zeitkonstante τ , sondern
die Halbwertszeit T angegeben.
Zwischen beiden Größen besteht die
Beziehung

$$T = \tau \cdot \ln 2 = 0,69 \tau$$

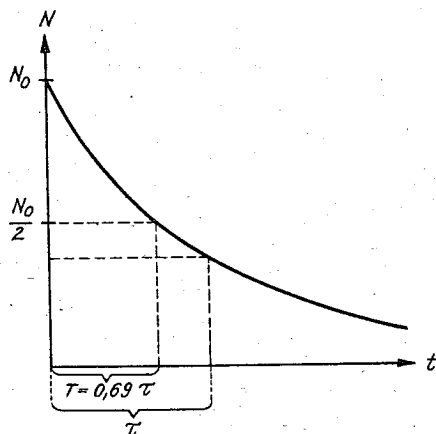


Bild 33
Verlauf des Zerfalls radio-
aktiver Präparate

Zum Beispiel wird für Polonium (Po; $Z = 84$, $A = 210$) $T = 140$ d, also

$$\tau = \frac{T}{0,69} = 200 \text{ d}$$

Das ist die Zeit, bis zu der die Radioaktivität des Elementes Po auf den e-ten Teil abgeklungen ist.

Aus (114) folgt nun

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{N}{\tau},$$

d.h., während einer Beobachtungszeit von 1 s zerfallen im Mittel

$$\Delta N / 1s = \frac{N}{\tau} = \frac{N}{200 \cdot 24 \cdot 3600} = \frac{N}{1,73 \cdot 10^7}$$

Teilchen. Die Wahrscheinlichkeit p für den Zerfall irgendeines Atomes innerhalb der Zeit dt ist somit gegeben durch

$$p = \frac{\Delta N}{N} = \frac{dt}{\tau} = \frac{1s}{\tau} = \frac{1}{1,73 \cdot 10^7} = 5,8 \cdot 10^{-8}$$

Die Feststellung (113b) wird also tatsächlich bestätigt.

Da im Grunde genommen jedes der N beteiligten Atome auf Zerfall untersucht bzw. beobachtet wird, muß für die Zahl der Versuche

$$m = N$$

gesetzt werden. Die Versuchsbedingungen, wie Größe N_0 des Präparates, Abstand des Zählrohres, Meßdauer dt , werden dabei natürlich so festgelegt, daß das Zählrohr stets eine gut meßbare Zahl von Impulsen aufnimmt. Es muß also gelten

$$m \gg n$$

Analoge Verhältnisse ergeben sich z.B. auch beim Elektronenaustritt aus Metallen (Schroteffekt). Auch dort ist $p \ll 1$, denn die Zahl der während der Meßzeit austretenden Elektronen ist weit aus geringer als die Zahl der im Metall überhaupt vorhandenen Elektronen.

Eine ausführliche Behandlung dieses Problems erfolgt später.

4. Bildung von Mittelwerten. Allgemein gilt für die Mittelwertbildung einer Größe z , die mit der Wahrscheinlichkeit $W(z)$ auftritt, die Beziehung

$$\bar{z} = \sum_{z=0}^{\infty} z \cdot W(z) = \frac{1}{N} \sum_{z=0}^{\infty} z \cdot \Delta N \quad (115)$$

Also folgt für den Mittelwert von n

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^m n \cdot P_m(n) \quad (116a)$$

und für den Mittelwert von n^2

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^m n^2 P_m(n) \quad (117a)$$

Während die Berechnung von $\bar{n}$ einfach auf

$$\bar{n} = pm \quad (118)$$

führt, erfordert die Berechnung von $\overline{n^2}$ etwas mehr Aufwand. Die Verteilungsfunktion $W(z)$ bzw. $P_m(n)$ gibt an, in welchem Maß die z - oder n -Werte in die Summierung (Mittelwertbildung) eingehen. Wegen der Faktoren n bzw. n^2 in (116a) und (117a) ist $n = 0$ auf die Mittelwertbildung ohne Einfluß. Die Summierung kann deshalb mit $n = 1$ beginnen, also

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^m n P_m(n) = pm \quad (116b)$$

und

$$\overline{n^2} = \sum_{n=1}^m n^2 P_m(n) \quad (117b)$$

Schreibt man nun in (117b)

$$n^2 \equiv n + n(n-1),$$

so wird die Aufspaltung

$$\overline{n^2} = \sum_{n=1}^m n P_m(n) + \sum_{n=2}^m n(n-1) P_m(n)$$

möglich. Die Summierung über den zweiten Ausdruck ist erst ab $n = 2$ sinnvoll, da für $n = 1$ der Faktor $n(n-1) = 0$ wird. Das erste Glied der Summe aber liefert, wie ein Vergleich mit (116b) zeigt, den Mittelwert $\bar{n}$. Mit (112b) und (116b) wird also

$$\overline{n^2} = pm + \sum_{n=2}^m \frac{n(n-1)}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}$$

oder, wenn die Abkürzung

$$1 - p = q$$

eingeführt wird,

$$\overline{n^2} = pm + \sum_{n=2}^m \frac{n(n-1)}{n!} \frac{m!}{(m-n)!} p^n \cdot q^{m-n}$$

Da die Summation erst bei $n = 2$ beginnt, läßt sich p^2 ausklammern, und es folgt:

$$\overline{n^2} = pm + p^2 \sum_{n=2}^m \frac{n(n-1)}{n!} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} p^{n-2} q^{m-n}$$

Da ferner

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)!}$$

gilt und für

$$m! = (m-2)! (m-1)m$$

geschrieben werden kann, läßt sich obiger Ausdruck schließlich auf die Form

$$\overline{n^2} = pm + m(m-1) p^2 \sum_{n=2}^m \frac{(m-2)!}{(n-2)!(m-n)!} p^{n-2} q^{m-n}$$

oder

$$\overline{n^2} = pm + m(m-1) p^2 \cdot A$$

bringen. Die Summe A ist dabei mit der Binomentwicklung

$$A = (q + p)^{m-2}$$

identisch. Durch Berechnung des ersten und letzten Gliedes dieser Reihe kann man sich davon leicht überzeugen:

$$\text{Erstes Glied: } n = 2 \longrightarrow \frac{(m-2)!}{0!(m-2)!} q^{m-2} = q^{m-2}$$

$$\text{Letztes Glied: } n = m \longrightarrow \frac{(m-2)!}{(m-2)!0!} p^{m-2} = p^{m-2}$$

Da nach dem Additionsgesetz für Wahrscheinlichkeiten

$$q + p = 1$$

sein muß, wird

$$A = (q + p)^{m-2} = 1,$$

und es ergibt sich

$$\overline{n^2} = pm + m(m-1)p^2 = pm + p^2m^2 - p^2m = p^2m^2 + pm(1-p)$$

Bei Berücksichtigung von (118) folgt schließlich

$$\overline{n^2} = \bar{n}^2 + \bar{n}(1-p) \quad (119)$$

Für physikalische Schwankungserscheinungen vereinfacht sich dieser Ausdruck infolge $p \ll 1$ noch weiter auf

$$\overline{n^2} = \bar{n}^2 + \bar{n} \quad (120)$$

5. Das Quadrat der relativen Schwankung. Eine technisch außerordentlich wichtige Größe ist der Mittelwert des Quadrates der Abweichungen Δ vom Mittelwert $\bar{n}$, also das mittlere Fehler- oder Schwankungsquadrat

$$\overline{\Delta^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n^2} - 2\overline{n\bar{n}} + \bar{n}^2 \quad 1)$$

Da sich die Mittelung des Produktes $2n\bar{n}$ nur über n , dessen Mittelwert natürlich $\bar{n}$ ist, erstreckt, wird

$$\overline{2n\bar{n}} = 2\bar{n}^2,$$

und es folgt

$$\overline{\Delta^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad (121a)$$

Für den in der physikalischen Statistik vorherrschenden Spezialfall $m \gg n$ und $p \ll 1$ wird also bei Berücksichtigung von (120)

$$\overline{\Delta^2} = \bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n} \quad (121b)$$

Das mittlere Schwankungsquadrat ist also gleich dem Mittelwert von n .

Meistens wird dieses allgemeine Schwankungsgesetz in normierter Form, d.h. auf $\bar{n}$ bezogen, angegeben. Es lautet dann allgemein

$$\delta^2 = \frac{\overline{\Delta^2}}{\bar{n}^2} = \frac{\overline{(n - \bar{n})^2}}{\bar{n}^2} \quad (122a)$$

1) Eine doppelte Mittelung wäre sinnlos, da $\overline{\bar{n}^2} = \bar{n}^2$.

Speziell für physikalische Schwankungserscheinungen ($m \gg n$; $p \ll 1$) folgt, durch Anwendung von (121b),

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{n} \quad (122b)$$

Dabei gibt $\overline{\delta}$ als relative Schwankung ein Maß für die Breite der Streuung. Die Beziehung (122b) ist ein wichtiges Grundgesetz der Statistik. Es gilt aber nur dann, wenn sämtliche Einzelereignisse n voneinander unabhängig sind.

Nachfolgende Beispiele zeigen, daß die praktische Anwendbarkeit von (122b) sehr vielseitig ist.

1. Beispiel: Zerfallen im Mittel pro Sekunde $\bar{n} = 20$ Atome eines radioaktiven Elementes, so wird das mittlere Schwankungsquadrat

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}} = 0,05$$

Für die unter 1. angeführte relativ kleine Zahl von Messungen ($m = 10$) wurde errechnet

$$\overline{\delta^2} = 0,044$$

2. Beispiel: Anschließend an das früher erwähnte verkehrsstatistische Problem mögen im Mittel $\bar{n} = 100$ Personen ein Verkehrszentrum in einem bestimmten Zeitabschnitt passieren. Daraus folgt das mittlere Schwankungsquadrat

$$\overline{\delta^2} = 10^{-2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\overline{\delta^2}} = 10^{-1}$$

Die relative Streuung beträgt in diesem Fall $\pm 10 \%$.

3. Beispiel: Dichteschwankungen. Bei Normalbedingungen befinden sich in einem Gas je Liter im Mittel $\bar{n} = 2,7 \cdot 10^{22}$ Molekeln.

Das relative mittlere Schwankungsquadrat wäre also mit

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}} = 3,7 \cdot 10^{-23},$$

unmeßbar klein. Wählt man aber das Beobachtungsvolumen ΔV so klein, daß es im Mittel nur $\bar{n} = 20$ Teilchen enthält, also

$$\Delta V = \frac{20}{2,7 \cdot 10^{22}} \cdot 1 \text{ Liter} = 7,4 \cdot 10^{-22} \text{ Liter} \quad 1),$$

1) Diesem Wert entspricht eine Linearabmessung von

$$a = \sqrt[3]{\Delta V} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

so würde folgen:

$$\overline{\delta^2} = 0,05$$

Die Dichteschwankungen wären dann gut nachweisbar.

4. Beispiel: Brownsche Molekularbewegung. Der englische Botaniker Brown entdeckte 1827, daß mikroskopisch kleine, in Gasen oder Flüssigkeiten schwebende Teilchen eine nach Geschwindigkeit und Richtung dauernd wechselnde (zitternde) Bewegung ausführen. Je kleiner das Teilchen ist, um so größer werden diese durch molekularen Stoß verursachten Impulsschwankungen. Auch hier gilt wieder das Gesetz vom mittleren Schwankungsquadrat.

5. Beispiel: Schroteffekt. Träger des elektrischen Stromes ist eine statistisch schwankende Vielzahl elektrischer Ladungen (vorwiegend Elektronen). Die Schwankungen werden bei sehr großer Verstärkung in Elektronenröhren als Rauschen hörbar, das wie ein Auffallen von Blei-Schrot auf eine Platte klingt. Liefert eine im Sättigungsgebiet arbeitende Glühkatode z.B. einen Strom $J_0 = 10 \text{ mA}$, so wird dieser im Mittel von

$$\bar{n} = \frac{J_0 \cdot \Delta\tau}{q_0} = \frac{10^{-2} \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 6,25 \cdot 10^{16}$$

Elektronen je Zeiteinheit ($\Delta\tau = 1 \text{ s}$) getragen. Das relative Schwankungsquadrat ist also

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}} = 1,6 \cdot 10^{-17},$$

und die relative Schwankung selbst wird

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = 4 \cdot 10^{-9}$$

Infolge der außerordentlich großen Zahl von Elektronen (n) wird diese Schwankung unmeßbar klein.

Erst wenn man zu kleineren Stromstärken und Meßzeiten übergeht (z.B. $J_0 = 10^{-9} \text{ A}$ und $\Delta\tau = 10^{-6} \text{ s}$), lassen sich Stromschwankungen feststellen. Für die angegebenen Werte wird

$$\bar{n} = \frac{J_0 \cdot \Delta\tau}{q_0} = \frac{10^{-9} \text{ A} \cdot 10^{-6} \text{ s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 6250$$

und

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}} = 1,6 \cdot 10^{-4}$$

Die relative Schwankung beträgt also

$$\sqrt{\delta^2} = 1,3 \cdot 10^{-2} \approx 1,3 \%$$

6. Die Poissonverteilung: Bei Anwendung der Stirlingschen Näherungsformel

$$\ln x! = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \underbrace{\frac{1}{2} \ln 2 \pi}_{= 0,92} \quad (123)$$

läßt sich die Bernoulliverteilung (112) für $m \gg n$ und $p = \bar{n}/m \ll 1$ wie folgt vereinfachen: Durch Logarithmieren von (112b) ergibt sich

$$\ln P_m(n) = \ln m! - \ln n! - \ln(m-n)! + n \ln p + (m-n) \ln(1-p)$$

Mit der obigen Näherungsformel, die auf $m!$ und $(m-n)!$ angewendet wird, folgt weiter:

$$\begin{aligned} \ln P_m(n) &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln m - m + 0,92 - \ln n! - \left(m-n + \frac{1}{2}\right) \ln(m-n) \\ &\quad + m - n - 0,92 + n \ln p + (m-n) \ln(1-p) \end{aligned}$$

oder, da $1/2$ gegen m und $(m-n)$ vernachlässigt werden kann,

$$\begin{aligned} \ln P_m(n) &= m \ln m - \ln n! - m \ln(m-n) + n \ln(m-n) - n(1 - \ln p) \\ &\quad + (m-n) \ln(1-p) \end{aligned}$$

Auf die Klammerausdrücke $(m-n)$ läßt sich $m \gg n$ anwenden. Des weiteren wird $-\ln p \gg 1$. Damit reduziert sich der obige Ausdruck auf

$$\ln P_m(n) = -\ln n! + n \ln m + n \ln p + m \ln(1-p)$$

Approximiert man nun noch

$$\ln(1-p) = -p,$$

so folgt schließlich

$$\begin{aligned} \ln P_m(n) &= -\ln n! + n(\ln m + \ln p) - m p \\ &= -\ln n! + n \ln mp - m p, \end{aligned}$$

oder, bei Verwendung von $\bar{n} = pm$,

$$\ln P_m(n) = -\ln n! + n \ln \bar{n} - \bar{n} \quad (124)$$

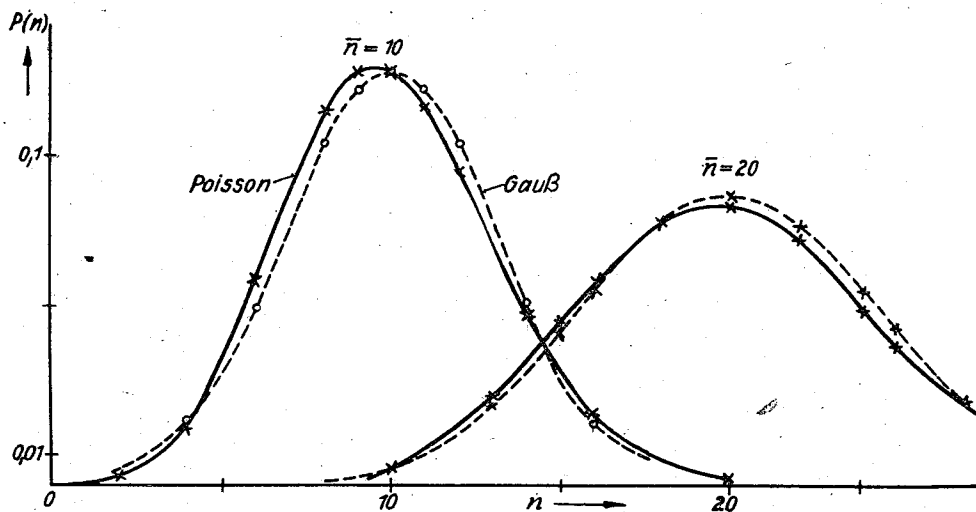


Bild 34
Verlauf der Verteilungsfunktionen nach
Poisson und Gauß

Durch Delogarithmierung von (124) ergibt sich nun die sogenannte Poissonverteilung

$$P_m(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = P(n) \quad (125)$$

Sie enthält nicht mehr die Anzahl m der „Versuche“ und auch nicht mehr die Wahrscheinlichkeit p des Einzelereignisses. Das ist sehr vorteilhaft, da m und p bei vielen physikalischen Problemen nicht bekannt sind. Einziger Parameter ist der experimentell sehr leicht festlegbare Mittelwert $\bar{n}$. Im Bild 34 ist der Verlauf der Poisson-schen Verteilungsfunktion $P(n)$ für $\bar{n} = 10$ und $\bar{n} = 20$ grafisch dargestellt. Es wird für

$$n = 0 : P(0) = \frac{\bar{n}^0}{0!} e^{-\bar{n}} = e^{-\bar{n}}$$

$$n = 1 : P(1) = \frac{\bar{n}^1}{1!} e^{-\bar{n}} = \bar{n} e^{-\bar{n}}$$

$$n \gg \bar{n} : P(\infty) \rightarrow 0$$

Im allgemeinen wird $P(0) \ll 1$. Für sehr großes n steigt $n!$ im Nenner stärker an als $\bar{n}^n$ im Zähler, so daß schließlich $P \rightarrow 0$ geht.

7. Die Gaußverteilung (Normalverteilung). Die allgemein geläufigere Gaußsche Verteilung läßt sich aus der Poissonverteilung ableiten, indem man die Stirlingsche Näherungsformel (123) auch noch auf $n!$ anwendet:

$$\ln P(n) = n \ln \bar{n} - \bar{n} - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n + n - \frac{1}{2} \ln 2 \pi. \quad (126)$$

Mit der relativen Abweichung vom Mittel

$$\epsilon = \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}, \quad (127)$$

die bei einer nicht zu kleinen Teilchenzahl $\bar{n}$ stets eine gegen 1 kleine Größe ist, läßt sich für n auch schreiben

$$n \equiv \bar{n} \left(1 + \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}\right) = \bar{n} (1 + \epsilon)$$

Der Ausdruck (126) lautet damit

$$\begin{aligned} \ln P(n) &= \bar{n}(1 + \epsilon) \ln \bar{n} - \bar{n} - \bar{n}(1 + \epsilon) \ln [\bar{n}(1 + \epsilon)] - \frac{1}{2} \ln [\bar{n}(1 + \epsilon)] \\ &\quad + \bar{n}(1 + \epsilon) - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \\ &= \bar{n}(1 + \epsilon) \ln \bar{n} - \bar{n} - \bar{n}(1 + \epsilon) \ln \bar{n} - \bar{n}(1 + \epsilon) \ln(1 + \epsilon) - \frac{1}{2} \ln \bar{n} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(1 + \epsilon) + \bar{n} + \bar{n}\epsilon - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \\ &= -\bar{n}(1 + \epsilon) \ln(1 + \epsilon) - \frac{1}{2} \ln(1 + \epsilon) - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \bar{n} + \bar{n}\epsilon \end{aligned}$$

Wird nun $\epsilon \ll 1$, so läßt sich die Näherung

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}$$

anwenden. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \ln P(n) &= - \left[\bar{n}(1 + \epsilon) + \frac{1}{2} \right] \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} \right) + \bar{n}\epsilon - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \bar{n} \\ &= -\bar{n}\epsilon - \bar{n}\epsilon^2 + \frac{1}{2} \bar{n}\epsilon^2 + \frac{1}{2} \bar{n}\epsilon^3 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2 + \bar{n}\epsilon - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \bar{n} \\ \ln P(n) &= -\frac{1}{2} \bar{n}\epsilon^2 + \frac{1}{2} \bar{n}\epsilon^3 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{1}{2} \ln 2 \pi \bar{n} \quad (128) \end{aligned}$$

Welche Glieder in diesem Ausdruck gestrichen werden können, erfordert eine sorgfältige Diskussion. Ein Glied darf nur dann wegfallen, wenn es nachweislich vernachlässigbar gegen ein anderes ist.

So kann das zweite Glied gegenüber dem ersten und das vierte gegen das dritte gestrichen werden. Die verbleibenden Glieder $\frac{1}{2} \bar{n} \varepsilon^2$ und $\frac{1}{2} \varepsilon$ erfordern jedoch wieder besondere Überlegungen. Grundsätzlich müssen die Quadrate der relativen Abweichungen ε von der gleichen Größenordnung wie das mittlere Schwankungsquadrat, also

$$\varepsilon^2 \approx \overline{\delta^2}$$

sein. Bei physikalischen Vorgängen wird deshalb und infolge (122b)

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{\bar{n}}$$

Für das erste Glied ergibt sich somit

$$\frac{1}{2} \bar{n} \varepsilon^2 \approx \frac{1}{2} \bar{n} \cdot \frac{1}{\bar{n}} = \frac{1}{2}$$

und für das zweite

$$\frac{1}{2} \varepsilon \approx \frac{1}{2 \sqrt{\bar{n}}} \ll 1$$

Letzteres ist also gegen das erste vernachlässigbar klein. Für praktische Fälle folgt hiermit

$$\ln P(n) = -\frac{1}{2} \bar{n} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \ln(2 \pi \bar{n}),$$

oder bei Berücksichtigung von (127)

$$\ln P(n) = -\frac{(n - \bar{n})^2}{2 \bar{n}} - \frac{1}{2} \ln(2 \pi \bar{n})$$

Durch Delogarithmieren folgt daraus schließlich die Gaußsche Verteilungsfunktion (Bild 34)

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \bar{n}}} e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2 \bar{n}}} \quad (129)$$

Wird in diese Funktion das statistische Grundgesetz

$$\overline{\Delta^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}$$

eingeführt, so erhält man

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi (n - \bar{n})^2}} e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2(n - \bar{n})^2}} \quad (130)$$

Damit ergibt sich die Möglichkeit, den Mittelwert

$$\bar{n} = 0$$

zu setzen. Aus (129) folgt dann das Gaußsche Fehlergesetz

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^2}} e^{-\frac{1}{2} n^2 / n^2} \quad (131)$$

Da für das mittlere Fehlerquadrat der Abweichung die Bezeichnung

$$\sigma^2 = (n - \bar{n})^2 \quad (132)$$

üblich ist ¹⁾, folgt aus (130) auch

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2 \sigma^2}} \quad (133)$$

(Gaußsches „Fehlergesetz“).

8. Übergang zu stetigen Variablen. Die bisherigen Überlegungen befaßten sich ausschließlich mit ganzen Zahlen von n. Bei großen n-Werten, die für die Poissonsche und Gaußsche Verteilung Voraussetzung sind, kann aber für ein kleines Intervall, das der Bedingung

$$n \rightarrow dn \ll \bar{n}$$

genügt, die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben werden, daß die Schwankungsgröße zwischen

$$n \quad \text{und} \quad n + dn$$

zu liegen kommt, da man $P(n)$ in diesem sehr kleinen Bereich als konstant annehmen kann. Dieses Verfahren ist in der kinetischen Statistik längst üblich (z.B. Maxwell-Verteilung).
Damit wird dann

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{(n - \bar{n})^2}{2 \sigma^2}} \cdot dn = P(n) \cdot dn \quad (134)$$

1) Bisher wurde das mittlere Fehlerquadrat der Abweichung immer mit Δ^2 bezeichnet.

Im Grenzfall ($dn \rightarrow 0$) läßt sich die Variable n als stetige Veränderliche auffassen. Man gewinnt dadurch die Möglichkeit, physikalische Größen, wie etwa Spannung oder Strom, als schwankende Größen darzustellen.

So erscheint z.B. an den Enden eines metallischen Leiters auch ohne Stromdurchgang eine dauernd schwankende Spannung, deren Mittelwert natürlich verschwindet. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Spannung u würde dann gemäß (134) folgen

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma^2}} \cdot du$$

Im Falle dieses sogenannten Widerstandsrauschens wird der Mittelwert der Spannung $\bar{u} = 0$, und es gilt entsprechend (132)

$$\sigma^2 = \overline{u^2} = u_{\text{eff}}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = u_{\text{eff}}$$

Für die Verteilung ergibt sich damit

$$\frac{dP}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u_{\text{eff}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_{\text{eff}}}\right)^2} \quad (135)$$

Dieselbe Formel gilt auch für die Verteilung der Meßfehler x einer Meßreihe. Sie wird meist in der Form

$$\varphi(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (136)$$

angegeben, wobei

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} x_{\text{eff}}} \quad (137)$$

das Präzisionsmaß genannt wird. Je kleiner der mittlere Fehler x_{eff} ist, desto größer wird h und desto enger und höher verläuft die Verteilungskurve. Der von ihr eingeschlossene Flächeninhalt ist natürlich gleich 1. (Dies gilt im übrigen auch für alle anderen Wahrscheinlichkeitskurven, da die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Größe zwischen 0 und ∞ liegt stets gleich 1 ist.)

9. Zusammenstellung der Verteilungsformeln. Zur Übersicht sollen abschließend die 3 abgeleiteten Verteilungsformeln zusammengestellt werden:

a) Bernoullische Verteilung (Binominalverteilung)

$$P_m(n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \quad (m \geq n)$$

Sie gilt streng für alle Werte m und n .

b) Poissonsche Verteilung

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Sie gilt nur für $m \gg n$, also $p = \frac{\bar{n}}{m} \ll 1$, wobei auch $n \gg 1$ sein muß.

c) Gaußsche Verteilung (Normalverteilung)

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}$$

[11] Schwankungserscheinungen in der Elektrotechnik (Rauschen)

1. Rauschspektrum des Elementarvorganges. Das Rauschen ist auf die Quantelung der Materie und der Elektrizität zurückzuführen. Aufgabe des Nachrichtentechnikers ist es, dieses Rauschen möglichst unschädlich zu machen. Dabei interessiert weniger die Wahrscheinlichkeit gewisser Abweichungen des Stromes oder der Spannung vom Mittelwert als vielmehr das Spektrum der Schwankungen oder des Rauschens, da nur bei Kenntnis der Frequenzverteilung Aussagen über die Durchlässigkeit von Vierpolen (Filtern) möglich sind. Eine Frequenzanalyse des Rauschens läßt sich mit Hilfe der Fouriertransformation durchführen. Diese Funktionaltransformation läßt sich symbolisch wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (138)$$

$$\bullet \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (139)$$

Während im Oberbereich (138) die Zeitabhängigkeit eines Vorganges dargestellt wird, gibt der Unterbereich (139) die dazugehörige Frequenzabhängigkeit (Spektrum).

Beide Darstellungsarten sind in ihrer physikalischen Aussagekraft einander vollkommen gleichwertig. Welche Art bevorzugt wird, hängt von dem gerade vorliegenden Problem ab.

Im vorliegenden Falle interessieren wir uns für das Spektrum (139). Zu seiner Berechnung geht man so vor, daß man zunächst den für das Rauschen verantwortlichen Elementarvorgang $f(t)$ feststellt und dann mit (139) das zugehörige Spektrum bestimmt. Das Spektrum des Gesamtrauschens ergibt sich dann aus der Überlagerung der Spektren der - statistisch regellos verteilten - Elementarvorgänge.

In fast allen Fällen ist der Elementarvorgang des Rauschens eine Elektronenbewegung in - negativer - Feldrichtung. Den dadurch bewirkten Strom $i(t)$ setzen wir anstelle von $f(t)$ in (139) ein und erhalten für das „Elementarspektrum“ $F_0(\omega)$:

$$F_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (140)$$

Der Beitrag eines solchen Elementarvorganges zum Gesamtrauschen im Frequenzintervall $d\omega$ ergibt sich dann nach (138) zu

$$df(t) = \frac{2}{2\pi} F_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

oder, mit $d\omega = 2\pi df$,

$$df(t) = 2 F_0(\omega) e^{j\omega t} df \quad (141)$$

Der Faktor 2 ergibt sich deshalb, weil gemäß den in (138) vorgeschriebenen Integrationsgrenzen $+\infty$ und $-\infty$ auch die negativen Frequenzen berücksichtigt werden müssen. Obwohl negative Frequenzen physikalisch keinen Sinn haben, erfaßt man sie mathematisch dadurch, daß $F_0(\omega)$ doppelt gerechnet wird. Da der Betrag von $F_0(\omega)$ stets eine gerade Funktion von ω ist ¹⁾, also

$$F_0(+\omega) = F_0(-\omega)$$

gilt, ist dieses Verfahren erlaubt.

1) Der Nachweis wird später erbracht.

2. Rauschstrom des Elementarvorganges. In den meisten Fällen

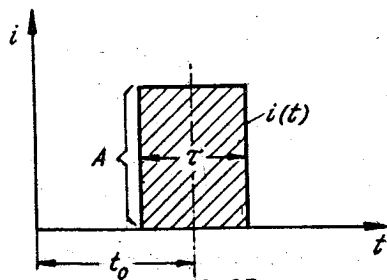


Bild 35
Stromimpuls als Elementar-
vorgang des Rauschens

besteht der Elementarvorgang des Rauschens aus einem rechteckigen Stromimpuls der Amplitude A und der Dauer τ (Bild 35). Wird angenommen, daß die Mitte eines beliebigen Impulses bei $t = t_0$ liegt, so berechnet sich sein Frequenzspektrum nach (139) bzw. (140) zu

$$F_0(\omega) = A \int_{t_0 - \tau/2}^{t_0 + \tau/2} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{j\omega} \left[e^{-j\omega(t_0 - \tau/2)} - e^{-j\omega(t_0 + \tau/2)} \right]$$

Durch Umformen und Anwenden der Eulerschen Formel folgt daraus weiter

$$F_0(\omega) = \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \left[e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right]$$

$$= \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \left[\cos \frac{\omega\tau}{2} + j \sin \frac{\omega\tau}{2} - \cos \frac{\omega\tau}{2} + j \sin \frac{\omega\tau}{2} \right]$$

$$= \frac{2A}{\omega} e^{-j\omega t_0} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner noch mit $\tau/2$, so ergibt sich schließlich für das Fourierspektrum des Elementarvorganges

$$F_0(\omega) = A \tau e^{-j\omega t_0} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad (142)$$

Die hier auftretende „Spaltfunktion“ (Bild 36)

$$\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

besitzt für $+\omega$ und $-\omega$ dasselbe Vorzeichen. Da der Betrag

$$|e^{-j\omega t_0}| = 1$$

wird, bestätigt sich also die obige Behauptung, daß der Betrag von $F_0(\omega)$ eine gerade Funktion von ω ist.

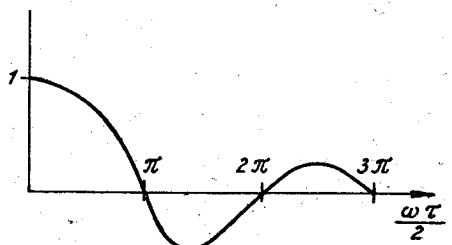


Bild 36
Verlauf der Spaltfunktion

Beschränkt man sich nun auf außerordentlich kleine Impulslängen ($\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$), so wird

$$\frac{\omega \tau}{2} \ll 1,$$

und die Spaltfunktion kann gleich 1 gesetzt werden. Damit folgt dann aus (142)

$$F_0(\omega) = A \tau e^{-j\omega t_0}, \quad (143)$$

und der Anteil des Elementarvorganges am Gesamtstrom wird gemäß (141)

$$df(t) = 2 A \tau e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} df \quad (144)$$

Alle Anteile haben die gleiche Einzelamplitude, aber eine je nach dem Wert von t_0 verschiedene Phasenlage. Die sich überlagernden Schwingungen sind also inkohärent. Würden ihre Amplituden einfach addiert, so ergäbe sich der Wert 0. Das ist der Gleichstromanteil des Rauschens.

Werden dagegen die Quadrate der Amplituden aller dieser Teilschwingungen addiert, so resultiert ein von 0 verschiedener Wert. Für insgesamt ν Einzelvorgänge (Elektronenflüge) je Zeiteinheit ergibt sich dann das Quadrat der Gesamtamplituden des Rauschens:

$$|F(\omega)|^2 = \sum_{\nu} 4 A^2 \tau^2 e^{-2 j\omega t_{\nu 0}}$$

und, da die e-Funktionen alle den Betrag (bzw. die Amplitude) 1 haben, folgt:

$$|F(\omega)|^2 = 4 A^2 \tau^2 \nu \quad (145)$$

Im Frequenzintervall df wird also das Quadrat der Amplitude $\hat{J}$ des Rauschstromes

$$\hat{J}^2 = |F(\omega)|^2 df = 4 A^2 \tau^2 \nu df \quad (146a)$$

Bei Berücksichtigung von

$$\hat{J} = \sqrt{2} J_{\text{eff}}$$

ergibt sich daraus sofort das Quadrat des Effektivwertes J_{eff} des Rauschstromes im Frequenzintervall df zu

$$J_{\text{eff}}^2 = 2 A^2 \tau^2 \nu df \quad (146b)$$

Der Rauschstrom ist also frequenzunabhängig, solange die Spaltfunktion gleich 1 gesetzt werden kann, also solange $\frac{\omega \tau}{2} \ll 1$ gilt. Mit Hilfe dieser allgemeinen Formel (146) lassen sich nun spezielle Fälle behandeln.

3. Nyquist-Rauschen (Johnsoneffekt). Das Rauschen eines metallischen Widerstandes ohne Strombelastung wurde 1928 von Nyquist theoretisch behandelt. Es ist die Folge der statistisch ungeordneten Elektronenflüge zwischen jeweils 2 Zusammenstößen. Für einen Widerstandsdraht der Länge l , dem Querschnitt S und der Dichte der Leitungselektronen n beträgt die Gesamtzahl der Elektronen

$$N = nV = n l S \quad (147)$$

Unter der Annahme, daß alle Elektronen eine einheitliche Geschwindigkeit haben, die gleich der Effektivgeschwindigkeit sein soll, gilt infolge der Gleichverteilung

$$\frac{m}{2} v_{\text{eff}}^2 = \frac{m}{2} (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{3}{2} kT$$

Für das Nyquist-Rauschen interessiert nur die Bewegung der Elektronen in Längsrichtung des Widerstandsdrahtes. Legt man sie in die x -Richtung, so wird wegen

$$\frac{m}{2} v_{\text{eff}}^2 = \frac{3}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{3}{2} kT,$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m} \quad (148)$$

Nimmt man weiter an, daß alle Elektronen eine gleiche freie Weglänge haben, die gleich der mittleren freien Weglänge λ sein soll, so ergibt sich für alle Elektronen auch die gleiche Freiflugdauer in x -Richtung

$$\tau = \frac{\lambda}{v_x} \quad (149)$$

Der Elementarvorgang ist also ein Elektronensprung um die Strecke λ mit der Geschwindigkeit v_x . Jeder dieser Elementarvorgänge verursacht im Schließungskreis des Widerstandes einen Stromimpuls ¹⁾

$$i(t) = \frac{q}{U} E v_x(t) \quad (150)$$

Mit $E = U/\ell$ ergibt sich also für die Amplitude A des Elementarvorganges

$$A = \frac{q}{\ell} v_x \quad (151)$$

Die Zahl ν der Einzelprozesse je s berechnet sich zu

$$\nu = \frac{N}{\tau}, \quad (152)$$

denn jedes der insgesamt N Elektronen des Drahtes stößt in der Zeiteinheit $1/\tau$ -mal zusammen und verursacht so $1/\tau$ Einzelimpulse je s.

Mit den Ausdrücken (151), (149) und (152) für A , τ und ν gibt (146b) für das Quadrat des effektiven Rauschstromes

$$J_{\text{eff}}^2 = 2 v_x \frac{N q^2 \lambda}{\ell^2} df \quad (153)$$

Anstelle der atomaren Größen q , λ , v_x und N können die Temperatur T und der Widerstand R des Drahtes, also direkt meßbare Größen, eingeführt werden. Für den Widerstand gilt allgemein

$$R = \frac{\ell}{\kappa s},$$

wobei für

$$\kappa = n q b, \quad b = \frac{1}{2} \frac{q \lambda}{m v_x} \quad \text{und} \quad n = \frac{N}{s \ell} \quad (154a,b,c)$$

zu setzen ist. Es wird also

$$R = \frac{\ell^2}{N q^2 \lambda} 2 m v_x \quad \text{bzw.} \quad \frac{R}{2 m v_x} = \frac{\ell^2}{N q^2 \lambda},$$

und durch Einsetzen in (152) folgt bei Berücksichtigung von (148)

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{4 m v_x^2}{R} df = \frac{4 \ell T}{R} df \quad (155)$$

1) Vgl. Lehrbrief 9 „Theoretische Elektrotechnik“, S. 507.

2) Vgl. Lehrbrief 11 „Theoretische Elektrotechnik“, S. 635.

Der Rauschstrom J_{eff} kann als ein durch den Widerstandsdraht fließender Urstrom gedeutet werden. Meist wird allerdings die Rauschspannung an den Enden des offenen Widerstandes als Leerlaufspannung gemessen. Sie ergibt sich mit (154) zu

$$U_{\text{eff}}^2 = R^2 J_{\text{eff}}^2 = 4 R k T \cdot df \quad (156)$$

Die Formeln (155) bzw. (156) wurden 1928 von Nyquist abgeleitet. Die Rauschgrößen U_{eff} und J_{eff} sind frequenzunabhängig. Man spricht von einem „Weissen Rauschen“. Es gilt natürlich nur im Rahmen der obigen Beschränkung $\omega \tau \ll 1$. Zur Abschätzung der oberen Frequenzgrenze berechnet man die Freiflugdauer τ . Sie ergibt sich aus der Leitfähigkeit (154a) durch Einsetzen der Beweglichkeit (154b) und Berücksichtigung von (149) zu

$$\tau = \frac{2 m \kappa}{n q^2} \quad (157)$$

Für einen Aluminiumdraht mit $\kappa = 3 \cdot 10^7$ S/m, $m \approx 10^{-30}$ kg, $n \approx 5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ wird also angenähert

$$\tau = \frac{2 \cdot 10^{-30} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{S/m}}{5 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot \text{m}^{-3} (\text{As})^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

Fordert man, daß

$$\omega \tau \leq 10^{-2}$$

sein soll, so ergibt sich als obere Frequenzgrenze ω'

$$\omega' = 2 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \quad \text{bzw.} \quad f' = 3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

Dieser Wert entspricht einer Wellenlänge von 1 cm. Die Frequenzgrenze des „Weissen Rauschens“ liegt also sehr hoch.

Ein rauschender Widerstand läßt sich als Serienschaltung einer Spannungsquelle U_{eff} mit einem rauschfreien Widerstand R (Bild 37a) oder als Parallelschaltung einer Stromquelle J_{eff} mit einem ebenfalls rauschfreien Widerstand R (Bild 37b) darstellen. Um Rauschspannungen oder -ströme messen zu können, muß dem Rauschkreis durch einen angeschlossenen Zweipol (Bild 37c) Leistung entnommen werden. Die Höchstleistung wird im Meßkreis bei Anpassung verfügbar, d.h., wenn beide Widerstände gleichgroß sind:

$$R = R_m$$

(158) 85

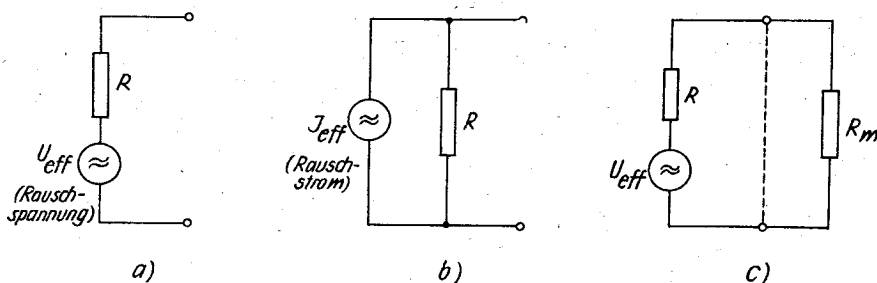


Bild 37
Ersatzschaltungen für rauschende Widerstände

Der Rauschgenerator liefert dem Meßkreis Leistung und entnimmt ihm Leistung. Ohne diese Rücklieferung müßte sich der Rauschgenerator im Widerspruch mit dem II. Hauptsatz der Wärmelehre abkühlen.

Die maximal, d.h. bei Anpassung verfügbare Leistung des Rauschgenerators wird

$$N_{\max} = R J_{\text{eff}}^2,$$

wobei

$$J_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{2R}.$$

zu setzen ist. Bei Benutzung von (156) ergibt sich dann

$$N_{\max} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{4R} = kT \cdot df \quad (159)$$

Die Rauschleistung ist also unabhängig von der Art des Widerstandes.

Das Energiegleichgewicht zwischen R und R_m gilt für jedes Frequenzintervall df (detailliertes Gleichgewicht). Andernfalls könnte durch Einschalten eines verlustlosen Filters der Energieübergang in einer Richtung vermindert werden, was ein Verstoß gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik wäre.

Bei ungleicher Temperatur strömt so lange mehr Leistung vom wärmeren zum kälteren Widerstand, bis das Temperaturgleichgewicht hergestellt ist.

4. Der Schroteffekt (Schottky). Das Rauschen von Vakuumdioden unterscheidet sich vom Nyquist-Rauschen durch die sehr viel größeren freien Weglängen. Der Einzelvorgang $i(t)$ ist der freie

Übergang eines Elektrons von der Katode zur Anode (Bild 38). Bei homogenem Feld zwischen Anode und Katode steigt $i(t)$ linear an (Bild 38, Verlauf a). Bei unhomogenem Feld, das z.B. durch Raum-

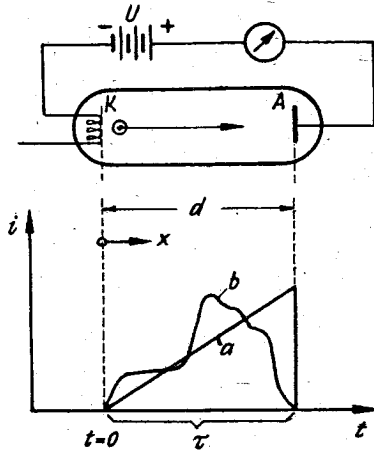


Bild 38
Einzelvorgang beim Rauschen
von Vakuumdioden

ladungen verursacht wird, ergibt sich dagegen ein unregelmäßiger Anstieg des Einzelvorganges (Bild 38, Verlauf b). Allgemein gilt wieder die Beziehung (150).

Das Spektrum des Einzelvorganges war durch (140) gegeben.

Beschränkt man sich auch hier wieder auf $\omega\tau \ll 1$, so wird im Intervall $0 \leq t \leq \tau$ die e-Funktion $e^{-j\omega t} = 1$, und es folgt

$$F_0(\omega) = \int_0^{\tau} i(t) dt$$

$$= q \frac{E}{U} \int_0^{\tau} \frac{dx}{dt} dt = q \quad (160)$$

Das Spektrum des Einzelvorganges ist also unabhängig von τ und i . Beim Nyquist-Rauschen ergab sich

$$F_0(\omega) = A \cdot \tau = \frac{q}{\ell} v_x \cdot \tau,$$

oder, da (149) gilt,

$$F_0(\omega) = q \frac{\lambda}{\ell}$$

Der Vergleich mit (160) zeigt jedoch, daß jetzt

$$\lambda \equiv \ell$$

wird, wobei ℓ den Abstand zwischen Katode und Anode bedeutet. Da die Fourieramplitude des Elementarvorganges beim Diodenrauschen (für $\omega\tau \ll 1$) frequenzunabhängig ist, läßt sich der Bereich negativer Frequenzen durch den Faktor 2 berücksichtigen. Der Anteil des Elementarvorganges am Rauschstrom ist also gegeben durch

$$2 F_0(\omega) = 2 q,$$

und für insgesamt ν Einzelvorgänge wird das Quadrat der Einzelamplituden

$$|F(\omega)|^2 = 4 q^2 \nu$$

Damit folgt aus (146a) das Quadrat der Amplitude des Rauschstromes im Frequenzintervall df zu

$$\hat{J}^2 = 4 q^2 \nu df \quad (161)$$

Das Quadrat des Effektivwertes wird mit (146b)

$$\hat{J}_{\text{eff}}^2 = 2 q^2 \nu df \quad (162)$$

Die Zahl ν der je s von der Katode zur Anode übergehenden Elektronen folgt aus dem mittleren Emissionsstrom (= Gleichstrom)

$$J_a = \nu q \quad (163)$$

zu

$$\nu = \frac{J_a}{q}$$

Es ergibt sich dann

$$J_{\text{eff}}^2 = 2 q J_a df \quad (164)$$

Im Gegensatz zum Nyquist-Rauschen überlagert sich dem Schrot-Rauschen ein Gleichstrom J_a . Analoge Verhältnisse ergeben sich z.B. auch, wenn Regentropfen auf ein Blechdach fallen oder auch beim Ansprechen eines Geigerzählrohres. Auch dort ist die Zahl der Einzelprozesse so groß, das kein einzelner Effekt, sondern nur noch ein Rauschen als mittleres Schwankungsquadrat

$$\bar{z} = \overline{(z - z)^2}$$

wahrnehmbar ist.

Für das Schrot-Rauschen ergibt die Einschränkung $\omega\tau \ll 1$ ebenfalls wieder eine obere Frequenzgrenze ω' . Fordert man, wie schon beim Widerstandsrauschen, $\omega'\tau = 10^{-2}$, so ergibt sich

$$\omega' = \frac{10^{-2}}{\tau}$$

Die hierin vorkommende Flugzeit τ eines Elektrons von der Katode zur Anode (Abstand d) berechnet sich zu

$$\tau = \frac{d}{v} \quad (165a)$$

oder, wenn v die Endgeschwindigkeit ist, mit der das Elektron auf die Anode nach Durchlaufen der Spannung U aufprallt,

$$\tau = \frac{d}{6 \cdot 10^5 \sqrt{U/v}} \quad (165b)$$

Wählt man z.B. $d = 1 \text{ cm}$ und $U = 100 \text{ V}$, so folgt also

$$\tau = \frac{10^{-2} \text{ m}}{6 \cdot 10^5 \sqrt{10^2} \text{ m/s}} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-8} \text{ s},$$

und die obere Frequenzgrenze des „Weißen Rauschens“ wird

$$\omega' = \frac{10^{-2}}{\tau} = \frac{10^{-2}}{\frac{1}{6} \cdot 10^{-8} \text{ s}} = 6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

bzw.

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 0,95 \text{ MHz} \approx 1 \text{ MHz}$$

Sie liegt also wesentlich tiefer als beim Nyquist-Rauschen ($f' = 30 \text{ 000 MHz}$). Allerdings muß die Forderung $\omega'\tau = 10^{-2}$ als sehr streng angesehen werden. Es würde auch schon $\omega'\tau = (1 \dots 5) \cdot 10^{-1}$ genügen.

5. Rauschverhalten von Dioden unter Berücksichtigung der Kennlinie. Die vollständige Kennlinie einer Vakuumdiode (Bild 39) gliedert sich in folgende 3 Bereiche ¹⁾:

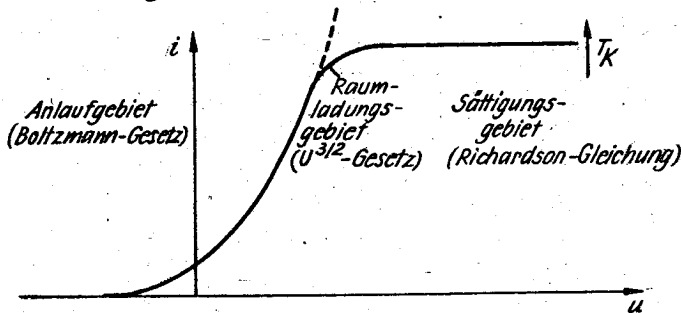


Bild 39
Kennlinie der Vakuumdiode

1) Vgl. Lehrbriefreihe „Theoretische Elektrotechnik“, Lb. 10; 11.

a) Anlauf- oder Exponentialgebiet: Die Anlaufstromdichte G_a errechnet sich nach Boltzmann zu

$$G_a = G_s e^{\frac{q U_a}{k T_K}}, \quad (166)$$

wenn G_s die Sättigungsstromdichte, T_K die Temperatur der Katode und U_a die im Anlaufgebiet negative Anodenspannung ist ($q = + 1,6 \cdot 10^{-19}$ As).

b) Sättigungsgebiet: Die Sättigungsstromdichte beträgt nach Richardson (s. Theoretische Elektrotechnik; 9. Lb., S. 472)

$$G_s = A T_K^2 e^{\frac{-q U_a}{k T_K}} \quad (167)$$

Dabei ist A eine Konstante und U_a die in Volt gemessene Austrittsarbeit.

c) Raumladungsgebiet: Hier gilt stets das $U^{3/2}$ -Gesetz

$$G_R = C U^{3/2} \quad (168)$$

Entscheidend für das Rauschverhalten der Diode ist die Fluktuation des Emissionsstromes der Katode. Diese folgt den früher entwickelten Wahrscheinlichkeitsgesetzen, da die Elektronenaustritte voneinander unabhängige Ereignisse darstellen. Der Katodenstrom schwankt also derart, daß sich für das Quadrat der Fourieramplitude der oben abgeleitete Ausdruck

$$\overline{i_K^2} = 2 q J_a \cdot df \quad (169a)$$

ergibt.

Im Sättigungsgebiet ist die Anodenspannung gegenüber dem Katodenpotential so groß, daß alle aus der Katode austretenden Elektronen die Anode erreichen. Der Anodenstrom ist also gleich dem Katoden- oder Emissionsstrom. Die Schwankungen des Katodenstromes müssen deshalb auch dem Anodenstrom in voller Größe überlagert erscheinen. Es gilt also:

$$\overline{i_a^2} = \overline{i_K^2} = 2 q J_a \cdot df \quad (169b)$$

Da der Sättigungsstrom im wesentlichen nur noch von der Temperatur T_K der Katode abhängt ¹⁾, wird

$$J_a = J_s = f(T_K)$$

Damit läßt sich der Rauschstrom nach (169b) auch als Funktion der Temperatur darstellen:

$$\overline{i_a^2} = 2 q f(T_K) df \quad (170)$$

Die Rauschmessungen an einer im Sättigungsgebiet arbeitenden Diode lassen sich so genau durchführen, daß mit ihrer Hilfe eine exakte Bestimmung des Elementarquantums q möglich ist. Eine derartige Rauschdiode kann deshalb auch als Rauschnormal benutzt werden.

Im Anlaufgebiet ist die Ankunft eines Elektrons an der Anode ein von anderen unabhängiges Ereignis, so daß also auch hier

$$\overline{i_a^2} = 2 q J_a df$$

gilt. Da jetzt aber nur die Elektronen zur Anode gelangen, deren Geschwindigkeitskomponente in Richtung Anode beim Austritt aus der Katode groß genug ist ²⁾, um gegen die im Anlaufgebiet negative Anodenspannung anlaufen zu können, wird die Rauschamplitude wesentlich kleiner als im Sättigungsgebiet.

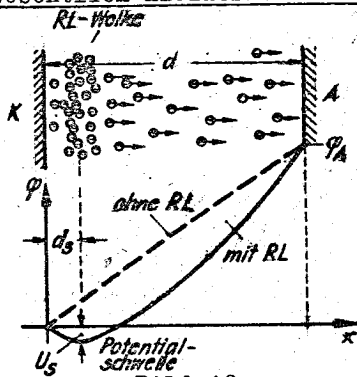


Bild 40

Einfluß der Raumladung (RL) auf den Potentialverlauf zwischen Katode und Anode einer Vakuumdiode

Etwas schwieriger gestalten sich die Überlegungen für das Rauschen im Raumladungsgebiet. Hier bildet sich vor der Katode eine negative Raumladungswolke aus, die eine negative Potentialschwelle zur Folge hat (Bild 40). Die aus der Katode zuströmenden Elektronen werden dadurch beeinflusst, so daß der zur Anode übergehende Elektronenstrom vermindert wird. Im Raum zwischen Schwelle und Anode gilt das Langmuir-Childsche Raumladungsgesetz.

- 1) Die Unabhängigkeit des Elektronenstromes von der Anodenspannung gilt infolge des Schottkyeffektes (Erniedrigung der Austrittsarbeit durch hohe Feldstärke) nur angenähert.
- 2) Es gilt die Maxwellverteilung (vgl. Theoretische Elektrotechnik, Bild 273).

Es lautet für ebene Elektroden

$$G_a = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2q}{m}} \frac{(U_a + U_s)^{3/2}}{(d - d_s)^2} (1 + \eta) \quad (171)$$

(η ist eine hier nicht interessierende Korrekturgröße.)
Obwohl auch hier wieder die Emission eines Elektrons an der Kathode ein vollkommen zufälliges Ereignis darstellt, trifft dies auf die Ankunft eines Elektrons an der Anode nicht mehr zu. Wird nämlich einmal zufällig eine größere Zahl von Elektronen emittiert, die zur Überwindung der Potentialschwelle fähig sind, so hinterlassen diese eine Vertiefung der Schwelle und erschweren den nachfolgenden Elektronen den Übergang zur Anode. Bei einer zufällig einmal kleineren Zahl emittierter Elektronen treten natürlich die umgekehrten Verhältnisse ein. Die Raumladung hat also einen teilweisen Ausgleich der Schwankungen zur Folge, d.h., sie vermindert das mittlere Schwankungsquadrat auf

$$(\bar{z} - \bar{z})^2 = k \cdot \bar{z}, \quad (172)$$

wenn k einen Faktor < 1 darstellt.

In der Tat beobachtet man im Raumladungsgebiet Rauscheinströmungen, die bis um das 10fache geringer sind als im Sättigungsgebiet. Formal läßt sich diese durch Raumladungskopplung (Gegenkopplung) verursachte Rauschminderung erfassen, wenn man den oben eingeführten Kopplungsfaktor k berücksichtigt. Der Effektivwert des Rauschstromes i_f ergibt sich dann zu

$$i_{\text{eff}}^2 = 2 q J_a k i_f \quad (173)$$

Weitere Rauschursachen in Vakuumröhren, namentlich in Trioden oder Mehrelektrodenröhren sollen nachfolgend nur kurz erwähnt werden.

6. Stromverteilungsrauschen. Das Verhältnis der Stromaufteilung auf Anode und Schirmgitter einer Mehrelektrodenröhre

$$\eta = \frac{\bar{i}_a}{\bar{i}_s} = \frac{\bar{z}_a}{\bar{z}_s} \quad (174)$$

bewirkt ein zusätzliches Rauschen des Anodenstromes, das sich dem Schrotrauschen überlagert (Addition der Quadrate!).

Infolge von

Zusammenstößen der Elektronen mit restlichen Gasmolekeln,
Schwankungen der Feldverteilung, hervorgerufen durch Schwan-
kungen der Elektrodenpotentiale, und
Schwankungen der Raumladungsdichte, deren Ursache Schwankungen
 der Gesamtemission und der sogenannte Funkeleffekt sein können,
 haben die von einem Flächenelement dS der Katode startenden Elek-
 tronен keine fest definierte Bahn. Die Wahrscheinlichkeit p des
Auftreffens auf die Anode bzw. die Wahrscheinlichkeit $(p - 1)$ des
Auftreffens auf das Schirmgitter ist deshalb nicht konstant, son-
 dern Schwankungen unterworfen. Es schwankt also die Anzahl z_a bzw.
 z_s der in einem bestimmten Zeitabschnitt an Anode bzw. Schirm-
 gitter eintreffenden Elektronen. Nur für die Mittelwerte dieser
 beiden Zahlen gilt

$$\bar{z}_a = p \bar{z}_0 \quad (175)$$

und

$$\bar{z}_s = (1 - p) \bar{z}_0, \quad (176)$$

wobei z_0 die ebenfalls statistisch schwankende Katodenemission,
 d.h. die Zahl der in der Zeiteinheit emittierten Elektronen ist.
 Beide Schwankungen verlaufen inkohärent.
 Das mittlere Schwankungsquadrat des Anodenstromes

$$\overline{(z_a - \bar{z}_a)^2}$$

setzt sich also aus 2 Anteilen zusammen:

Der erste ist der Anteil des schwankenden Katodenstromes (Schrot-
 effekt), der sich im Anlauf- und Sättigungsgebiet zu

$$p^2 \overline{(z_0 - \bar{z}_0)^2} = p^2 \bar{z}_0 \quad (177a)$$

und im Raumladungsgebiet zu

$$p^2 \overline{(z_0 - \bar{z}_0)^2} = k p^2 \bar{z}_0 \quad (177b)$$

berechnet. Dabei war $k \ll 1$ der Raumladungs-Kopplungsfaktor.

Der zweite ist der Anteil der schwankenden Verteilung auf Anode
 und Schirmgitter, also der von den Bahnschwankungen der bereits
 aus der Katode ausgetretenen Elektronen herrührende Anteil.

Nach (119) und (121a) ergibt sich

$$\overline{(z_a - \bar{z}_a)^2} = \bar{z}_a (1 - p),$$

und mit (175) wird daraus

$$\overline{(z_a - \bar{z}_a)^2} = p (1 - p) \bar{z}_0 \quad (178)$$

Ebenso setzt sich natürlich auch das mittlere Schwankungsquadrat des Schirmgitterstromes

$$\overline{(z_s - \bar{z}_s)^2}$$

aus den beiden Anteilen

$$(1 - p)^2 \overline{(z_o - \bar{z}_o)^2} = (1 - p)^2 \bar{z}_0 \quad (179a)$$

bzw. (bei Berücksichtigung der Raumladungskopplung)

$$(1 - p)^2 \overline{(z_o - \bar{z}_o)^2} = k (1 - p)^2 \bar{z}_0 \quad (179b)$$

und

$$\overline{(z_s - \bar{z}_s)^2} = z_s p$$

oder (bei Berücksichtigung von (176))

$$\overline{(z_s - \bar{z}_s)^2} = p (1 - p) \bar{z}_0 \quad (180)$$

zusammen. Damit ergeben sich für die mittleren Schwankungsquadrate die Ausdrücke

$$\overline{(z_a - \bar{z}_a)^2} = [k p^2 + p(1 - p)] \bar{z}_0 = k_a \bar{z}_0 \quad (181)$$

und

$$\overline{(z_s - \bar{z}_s)^2} = [k (1 - p)^2 + p (1 - p)] \bar{z}_0 = k_s \bar{z}_0, \quad (182)$$

wobei die durch Raumladungen geschwächte Schwankung der Emission wieder durch den Faktor k Berücksichtigung findet. Für das Anlauf- und Sättigungsgebiet wird natürlich $k = 1$.

Die hier neu auftretenden Faktoren k_a und k_s haben hinsichtlich des Anoden- bzw. Schirmgitterstromes dieselbe Bedeutung wie der Faktor k für den gesamten Katodenstrom. Damit lassen sich die Effektivwerte der Schwankungen beider Ströme entsprechend (173)

sofort hinschreiben. Es wird

$$\overline{i_a^2} = 2 q J_a k_a df \quad (183)$$

und

$$\overline{i_s^2} = 2 q J_s k_s df \quad (184)$$

Die Faktoren k_a und k_s lassen sich aus (181) bzw. (182) berechnen, wenn man berücksichtigt, daß

$$p = \frac{\overline{z_a}}{\overline{z_o}} = \frac{J_a}{J_k} \quad \text{und} \quad (1 - p) = \frac{\overline{z_s}}{\overline{z_o}} = \frac{J_s}{J_k}$$

gilt. Abschließend sei noch vermerkt, daß auch das Stromverteilungsrauschen ein frequenzunabhängiges, also ein weißes Rauschen ist.

7. Funkteffekt. Hier erscheint erstmalig ein frequenzabhängiges Rauschen. Für das Spektrum des quadratischen Mittelwertes gilt dabei ein Ansatz von der Form

$$\overline{i^2} = K \frac{J_g^a}{f^b} df, \quad (185)$$

wobei b eine positive Zahl nahe 1 ist und der Exponent a des Gleichstromes J_g etwa bei der Zahl 2 liegt. Die Rauschamplitude steigt also mit abnehmender Frequenz f an und macht sich deswegen bei niedrigen Frequenzen überhaupt erst bemerkbar.

Derartige Schwankungen lassen sich sowohl an Oxydkatoden als auch an W-Th-Katoden und reinen Wolframkatoden finden. Allerdings sind die Meßergebnisse noch nicht einheitlich, so daß sie noch keine endgültige Aussage über das Frequenzverhalten des Funkeffektes gestatten.

8. Rauschen von Gasentladungen (Niederdruck-Plasma). Bei der Ableitung des Schroteffektes (Hochvakuum) waren die Einzelereignisse einander kongruent und erfolgten nur zu statistisch verteilten Zeitpunkten. Im Plasma dagegen sind die Einzelereignisse selber statistisch unterschiedlich verteilt. In groben Zügen ergibt sich für eine homogene Säule (Niederdruckplasma) zwischen 2 Platten mit dem Abstand d folgender Rechnungsgang:

Die Anzahl der freien Elektronen in der Entladung sei im Mittel

$$N_o = n V$$

Die mittlere Freiflugdauer der Elektronen, also die mittlere Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstößen mit Gasmolekeln, sei $\bar{\tau} = \tau_0$. Da sich diese Freiflugzeiten τ wie die freien Weglängen verteilen, gilt für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer zwischen τ und $\tau + d\tau$ liegenden Freiflugzeit

$$dW = \frac{dN}{N} = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau \quad (186)$$

(Anmerkung: Gleiche Gesetzmäßigkeiten gelten auch beim radioaktiven Zerfall.) Die thermische (ungeordnete) Bewegung der Elektronen im Plasma führt natürlich zu einer isotropen Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z nach positiven und negativen Richtungen. Hat das zwischen den beiden Platten liegende elektrische Feld vom Betrag $E = U_0/d$ die x-Richtung, so wird der vom letzten Zusammenstoß herrührenden x-Komponente der thermischen Geschwindigkeit eine Beschleunigung

$$a = \frac{E q}{m} = \frac{U_0 q}{m d} \quad (187)$$

überlagert, und es resultiert die Geschwindigkeit (in x-Richtung)

$$v(t) = v_x + a t \quad (188)$$

Infolge der statistisch verteilten Geschwindigkeit v_x ergeben sich alle möglichen $v(t)$ -Verläufe (Bild 41). Da für die Komponenten der thermischen Geschwindigkeit im Gas die Gaußverteilung gilt, muß die größte Häufigkeit bei sehr kleinen v_x -Werten liegen (Bild 42).

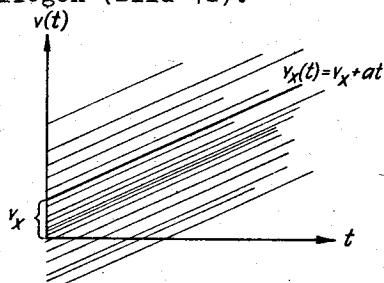


Bild 41
Resultierende Geschwindigkeiten
eines Elektrons bei Überlagerung
eines elektrischen Feldes

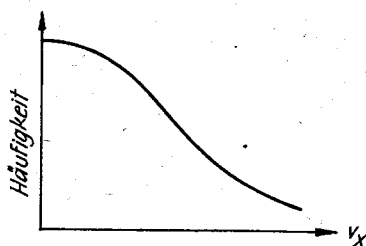


Bild 42
Häufigkeit der thermischen
Geschwindigkeiten im Plasma
in x-Richtung

Findet zur Zeit $t = 0$ ein Zusammenstoß des Elektrons statt, so wird sein Beitrag zum Gesamtstrom im homogenen Feld für $t > 0$

$$i(t) = \frac{qE}{U_0} v(t) = \frac{q}{d} v(t)$$

(Das Elektrodenpotential U_0 kürzt sich also heraus.) Mit (188) ergibt sich nun für den Einzelvorgang

$$i(t) = \frac{q}{d} (v_x + at) \quad (189)$$

Ist die Lebens- oder Freiflugdauer des Elektrons gleich τ , so berechnet sich die Fourierabbildung dieses Einzelvorganges gemäß

$$F_0(\omega, \tau) = \int_0^{\tau} i(t) e^{-j\omega t} dt$$

zu

$$F_0(\omega, \tau) = \frac{q}{d} \left[\frac{v_x}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) - \frac{a}{\omega^2} (1 - e^{-j\omega\tau} - j\omega\tau e^{-j\omega\tau}) \right] \quad (190)$$

Die Gesamtamplitude des Rauschstromes ergibt sich, wenn wieder die Amplituden der Einzelereignisse verdoppelt (Berücksichtigung der negativen Frequenzen!) und ihre Quadrate addiert werden:

$$|F(\omega)|^2 = \sum |2 F_0(\omega, \tau)|^2 \quad (191)$$

Da die Amplituden der Elementarprozesse noch von der Freiflugzeit τ abhängen, sind sie nicht einander gleich. Sie müssen also mit Berücksichtigung ihrer Häufigkeitsverteilung integriert werden:

$$|F(\omega)|^2 = 4 \frac{N_0}{\tau_0} \int_0^{\infty} |F_0(\omega, \tau)|^2 \underbrace{\frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0}}_{dW} d\tau \quad (192)$$

Hierbei bedeuten N_0/τ_0 die durchschnittliche Stoßzahl aller Elektronen je s. Die relative Häufigkeit ist durch (186) gegeben.

Die Integration von (192) ist wegen der unhandlichen Gl. (190) mühsam, aber elementar und geschlossen ausführbar. Es wird

$$|F(\omega)|^2 = \frac{8 q^2 N_0}{d^2 (1 + \omega^2 \tau_0^2)} \left[\frac{v_x^2}{\omega^2} \tau_0 + a^2 \tau_0^3 \frac{3 + (\omega \tau_0)^2}{1 + (\omega \tau_0)^2} \right] \quad (193)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{m}{2} \overline{v_x^2} = \frac{k}{2} T_e \quad \text{bzw.} \quad \overline{v_x^2} = \frac{k T_e}{m}$$

folgt für den Effektivwert (Faktor $1/2!$) des Rauschstromes innerhalb des Frequenzintervalles df die von Parzen und Goldstein (1950) ermittelte Beziehung

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} |F(\omega)|^2 df = \frac{4 q^2 N_0 \tau_0}{d^2 (1 + \omega^2 \tau_0^2)} \left[\frac{k T_e}{m} + a^2 \tau_0^2 \frac{3 + (\omega \tau_0)^2}{1 + (\omega \tau_0)^2} \right] df \quad (194)$$

Der erste Term gilt für $a = 0$, also ohne Entladungsfeldstärke. Er repräsentiert das schon bekannte thermische Rauschen (Nyquist-Rauschen) des Plasmas und wird wieder frequenzunabhängig für $\omega \tau_0 \ll 1$. Wie sich leicht abschätzen läßt, gilt diese Einschränkung nicht mehr für Frequenzen oberhalb von etwa 1 MHz.

Der zweite Term repräsentiert das zusätzliche Rauschen, das insbesondere durch die Wirkung der Elektronenbeschleunigung a verursacht wird. Für sehr hohe Frequenzen ¹⁾ hebt sich $\omega \tau_0$ im zweiten Term heraus, und es resultiert für das Rauschstromquadrat eine umgekehrte Proportionalität mit ω^2 , also

$$J_{\text{eff}}^2 \sim \frac{1}{\omega^2} \quad (195)$$

9. Rauschen von Halbleitern. Die wesentlichste Rauschquelle bei Halbleitern ist das durch unterschiedliche Lebensdauer der Elektronen verursachte Generationsrauschen. So sind z.B. bei einem N-Leiter (Ge- dotiert mit Sb oder As) Donoren als Elektronenspender vorhanden. Im Gleichgewicht werden von diesen Donoren freie Elektronen an das Leitband geliefert und auch wieder aus diesem heraus angelagert (Bild 43). Der ionisierte Donor (As^+) wirkt dann als Elektronenfalle. Im Mittel haben also die Elektronen im Leitband eine bestimmte meßbare Lebensdauer $\tau = \tau_0$. Jeder der zum Generationsrauschen beitragenden Einzelvorgänge kann durch das im Bild 44 dargestellte einfache Modell nachgebildet werden. Die Katode K ist Elektronenspender, die Anode A

1) Derartige Niederdruck-Plasmen benutzt man als Rauschstandard im Dezigebiet.

Elektronenfälle. Der zeitliche Abstand zwischen beiden entspricht einer Lebensdauer oder Freizeit τ_1 . Die Verteilung der Freizeiten ist wie oben durch

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau$$

gegeben. Jeder „Freiflug“ erzeugt einen rechteckigen Stromimpuls (Bild 45), dessen Amplitude

$$A = \frac{q E}{\pi} u = \frac{q}{d} u \quad (196)$$

wird.

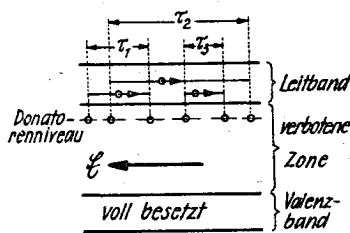


Bild 43
Darstellung der begrenzten Lebensdauer freier Elektronen bei einem N-Leiter

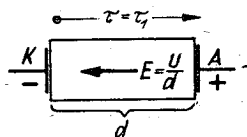


Bild 44
Modell des Generationsrauschens

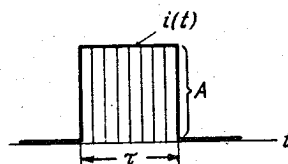


Bild 45
Stromimpuls als Einzelvorgang des Generationsrauschens

Setzt man für die Driftgeschwindigkeit u im Halbleiter die bekannte Beziehung

$$u = \mu E, \quad (197)$$

wobei μ die Elektronenbeweglichkeit ($\mu \approx 0,36 \frac{m}{Vs}$) ist, so folgt aus (196)

$$A = \frac{q}{d} \mu E \quad (198)$$

Da alle diese Stromimpulse inkohärent sind, lassen sie sich durch quadratische Summation überlagern. Innerhalb des Frequenzbandes df folgt dann für das Quadrat des Rauschstromes

$$J_{\text{eff}}^2 = 2 q \frac{J_g}{\tau_1} \left[\frac{2 \tau_0}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \right] df \quad (199a)$$

Diese Gleichung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der des Schrotoeffektes, denn auch dem Generationsrauschen überlagert sich ein Gleichstrom J_g . τ_1 ist die gesamte Driftzeit von der Katode bis zur Anode, die hier als obere Integrationsgrenze auftritt. Sie hängt sehr einfach mit der Elektronenbeweglichkeit μ und der Feldstärke E zusammen, denn es gilt

$$\tau_1 = \frac{d}{u} = \frac{d}{\mu E}$$

Der Ausdruck (199a) lautet damit

$$J_{\text{eff}}^2 = 4 \frac{q \mu J_g E}{d} \left[\frac{\tau_o}{1 + \omega^2 \tau_o^2} \right] df \quad (199b)$$

Führt man schließlich noch die Gleichstromleistung

$$P_o = J_g U = J_g E d$$

ein und berücksichtigt den Gesamtwiderstand

$$R = \frac{d}{\kappa S},$$

für den sich mit

$$\kappa = n q \mu$$

auch

$$R = \frac{d}{n q \mu S} = \frac{d^2}{n q \mu S d} = \frac{d^2}{n q \mu V} = \frac{d^2}{q \mu N_o}$$

schreiben läßt, so wird der in (199b) auftretende Faktor

$$\frac{q \mu J_g E}{d} = \frac{q \mu}{d^2} J_g E d = \frac{P_o}{R N_o}$$

Damit folgt schließlich

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{4 P_o}{N_o R} \left[\frac{\tau_o}{1 + \omega^2 \tau_o^2} \right] df \quad (199c)$$

Hierin ist $N_o = n V = n S d$ die Gesamtzahl der Elektronen im betrachteten Halbleiterstück der Länge d und des Querschnittes S .

Wird speziell $\tau_o \gg \tau_1$, so gelangen praktisch alle aus der Katode auftretenden oder in ihrer Nähe ins Leitband versetzten Elektronen

ohne Verlust bis zur Anode. In diesem Fall entstehen ähnliche Verhältnisse wie beim Schrotrauschen einer Vakuumdiode. Allerdings unterscheiden sie sich in der Form des Einzelvorganges, der im Halbleiter wegen

$$u = \mu E$$

stets ein Rechteckimpuls ist. Da jetzt aber die Laufzeit τ_1 erheblich größer als im Vakuum wird, läßt sich auch für mäßig hohe Frequenzen nicht mehr $\omega\tau \ll 1$ setzen. Die Spaltfunktion

$$\frac{\sin \omega\tau_1/2}{\omega\tau_1/2}$$

darf deshalb nicht mehr gleich 1 gesetzt werden, was eine ausgesprochene Frequenzabhängigkeit zur Folge hat.

Zu dem behandelten Generationsrauschen kommt in jedem Fall noch das frequenzunabhängige Nyquist-Rauschen

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{4 k T}{R} df$$

hinzu. Die Quadrate der Effektivwerte der Rauschströme setzen sich hierbei additiv zum Quadrat des gesamten Effektivwertes zusammen.

10. Zur Meßtechnik des Rauschens. Meßgröße ist stets die i.allg. sehr kleine Rauschleistung

$$P = R J_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Da diese dem Quadrat des effektiven Rauschstromes (J_{eff}^2) bzw. dem Quadrat der effektiven Rauschspannung (U_{eff}^2) proportional ist, sind quadratische Anzeigeinstrumente (z.B. Thermokreuz) für

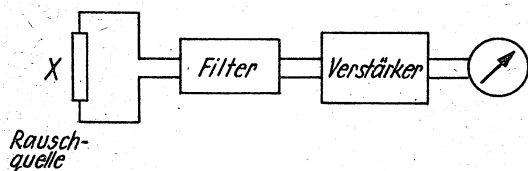


Bild 46
Blockschema zur Messung der
Rauschleistung

die Messung (Schema siehe Bild 46) am besten geeignet. Die erforderliche Eichung kann bei bekanntem Verstärker direkt erfolgen. Andernfalls ist Eichung mit einem Rauschstandard (Rauschdiode oder dgl.) erforderlich.

Als Detektor können Thermokreuz, Thermistor, Glühkathoden- oder Halbleiterdetektor Verwendung finden.

Die Messung erfolgt praktisch nach der Substitutionsmethode, also durch schnelles Umschalten und Vergleichen der unbekannten Rauschquelle X mit einem Rauschnormal. Als Rauschnormal eignen sich z.B. folgende Elemente:

- a) Ohmscher Widerstand im Temperaturbereich $T = 20^{\circ} \dots 2000^{\circ}\text{K}$. Der Rauschleistungsumfang beträgt etwa 20 db.
- b) Niederdruck-Plasma. Hier werden Elektronentemperaturen bis $80\,000^{\circ}\text{K}$ erreicht, die weitgehend vom Strom unabhängig sind. Um den Schroteffekt zu vermeiden, wird die Röhre meist senkrecht oder schräg in die HF-Leistung eingebaut.
- c) Rauschdiode. Die Rauschleistung läßt sich bequem durch Veränderung des Sättigungsstromes (Katodentemperatur!) in weiten Grenzen meßbar variieren.

[12] Korrelation von Schwankungen ¹⁾

1. Das Wesen der Korrelation. Eine Korrelation ist eine Wechselbeziehung zwischen zwei (oder auch mehreren) schwankenden Meßreihen.

So kann z.B. in der Landwirtschaft eine Korrelation zwischen der in den Frühjahrsmonaten März - April gemessenen Regenhöhen (mm) und dem Ertrag der Weizenernte (kg/m^2) für einen beliebig großen Zeitraum t (Bild 47) aufgestellt werden. Dabei braucht die Kor-

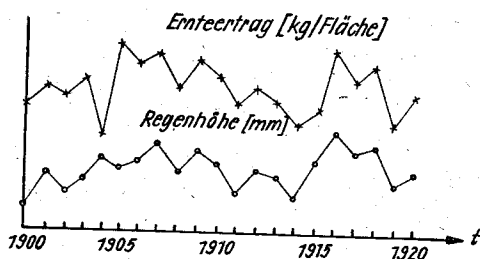


Bild 47
Korrelation zwischen Ernteertrag
und Regenmenge

relation keinesfalls 100%ig zu sein, da außer der Regenmenge als Hauptfaktor noch weitere Einflußgrößen eine Rolle spielen.

Die Korrelation zwischen Regenhöhe und Ernteertrag kann sogar negativ werden, wenn beispielsweise durch starken, zu Überschwemmungen führenden Regenfall ein großer Teil der Aussaat vernichtet wurde.

1) Literatur: Lange, F.H.: Korrelations-Elektronik, Berlin 1959

Eine positive Korrelation ergäbe sich ferner, wenn man z.B. Gewicht oder Größe von Vätern und Söhnen im jeweils gleichen Lebensalter gegenüberstellen würde, um nach Vererbungsgesetzmäßigkeiten zu suchen.

Aus nahezu allen Zweigen der Naturwissenschaft lassen sich weitere Beispiele nennen, wie z.B. aus der Astrophysik der Zusammenhang zwischen der Intensität des Polarlichtes und der Zahl der Sonnenflecken. Hierbei ist der einige Stunden zählende Zeitverzug zu berücksichtigen, den die Korpuskularstrahlung als Laufzeit bis zum Eintritt in die Erdatmosphäre benötigt.

Auch in der Meteorologie spielt die Statistik eine große Rolle. So besteht z.B. zwischen Wetterprognose und tatsächlichem Wetter eine Korrelation, wobei allerdings eine zahlenmäßige Kennzeichnung sehr schwierig ist.¹⁾

Die Physik bietet ebenfalls anschauliche Beispiele für Korrelationen. Mißt man z.B. die Anzahl der Molekel $n_1(t)$ und $n_2(t)$ in zwei Volumenelementen ΔV_1 und ΔV_2 , so wird es bei großem Abstand der Volumenelemente voneinander keine Korrelation geben. Rücken jedoch beide Volumenelemente näher aneinander, so werden bestimmte Wechselbeziehungen zwischen beiden Molekelzahlen auftreten. Wenn das eine Volumen das andere umhüllt, sind diese Beziehungen besonders stark ausgeprägt. Hierbei tritt nämlich eine große Antikorrelation (negative Korrelation) auf, denn je mehr Molekel sich im Volumenelement ΔV_1 aufhalten, um so weniger befinden sich in ΔV_2 .

2. Quantitative Kennzeichnung der Korrelation. Zwischen zwei statistischen Meßreihen

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_n$$

ergibt sich eine vollkommene Korrelation, wenn zwischen den Meßwerten x und y ein fester, z.B. linearer Zusammenhang

$$x = ay + b \quad (200)$$

1) Eine Korrelation zwischen Mondphase und Wetter gibt es trotz des weit verbreiteten Volksglaubens nicht.

besteht (Bild 48). Den Korrelationsfaktor setzen wir in diesem Fall gleich 1. Keine Korrelation (Korrelationsfaktor gleich 0) zwischen beiden Meßreihen besteht, wenn sich die Bildpunkte $P(x,y)$ gleichmäßig über beispielsweise den ganzen 1. Quadranten (Beschränkung auf positive Werte!) verteilen (Bild 49).

Die Extremwerte der Korrelation sind damit gekennzeichnet. Um aber auch Zwischenwerte der Korrelation (Korrelationsfaktor zwischen 0 und 1) zu erkennen, wird folgende Rechenregel aufgestellt:

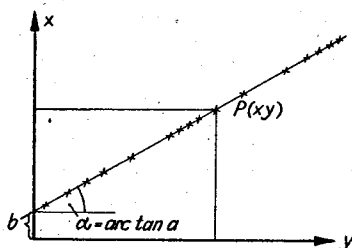


Bild 48
Vollkommene Korrelation

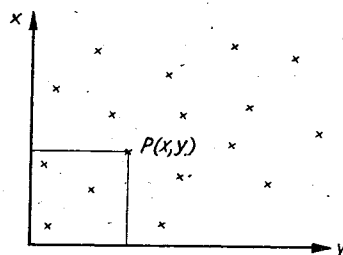


Bild 49
Keine Korrelation

Man befreit vorerst die Meßwerte x und y von ihrem Gleichanteil (Gleichglied), indem man die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (201a,b)$$

bildet und die Abweichungen vom Mittel (Fehler)

$$v = x - \bar{x}; \quad w = y - \bar{y} \quad (202a,b)$$

eingführt. Dabei ist v der Fehler der x -Größe und w der Fehler der y -Größe.

Bei vollkommener Korrelation hängen v und w wie folgt zusammen: Aus (200) folgt durch Mittelung

$$\bar{x} = a\bar{y} + b$$

Damit läßt sich für (202) schreiben

$$v = x - a\bar{y} - b \quad (202c)$$

$$w = y - \bar{y}$$

Multipliziert man (202b) mit einem Faktor $(-a)$ und addiert (202c) dazu, so folgt

$$v - aw = x - ay - b \quad (203)$$

oder, bei Berücksichtigung von (200),

$$v = aw$$

(204)

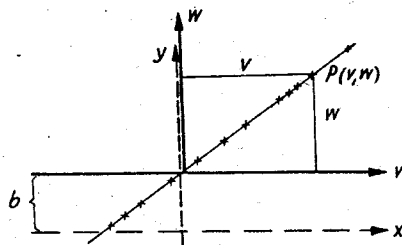


Bild 50

Vollkommene Korrelation zweier statistisch schwankender Meßreihen bei entferntem Gleichanteil

Für die Abweichung des Meßwertes x vom Mittel folgt also ebenfalls eine lineare Gesetzmäßigkeit. Die grafische Darstellung von (204) ergibt eine durch den Nullpunkt gehende Gerade (vgl. Bild 50).

Nachdem nun der Gleichanteil entfernt ist, bildet man das mittlere Fehlerquadrat. Für 2 Meßreihen v und w ist dieses sinngemäß als Mittelwert des Produktes $v \cdot w$ aufzufassen, also

$$\overline{v \cdot w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i \quad (205a)$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch als Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor auffassen, da

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i$$

ein inneres oder skalares Produkt ist. Man nennt

$$R = \overline{v \cdot w} \quad (205b)$$

das Korrelationsmaß.

Wenn keine Korrelation vorliegt, wird $R = 0$. Dies läßt sich einfach beweisen, wenn man annimmt, daß z.B. innerhalb der v -Reihe eine Teilsumme von gleichen v -Werten

$$v_1 = v_2 = v_3 = \dots v_l \dots = v' = \text{konst.}$$

existiert ¹⁾. Aus (205) folgt dann für die Teilsumme, die sich auf v bezieht

$$R = \frac{v'}{n} \sum_{i=1}^{\ell} w_i = v' \cdot \bar{w} \rightarrow 0$$

Die mittlere Abweichung

$$\bar{w}_i = y - \bar{y}$$

wird dabei um so eher null, je größer ℓ ist.

Damit sich bei vollkommener Korrelation der Wert $R = 1$ ergibt, ist die Einführung einer Normierungsgröße (Effektivwert) notwendig

$$k = \sqrt{v^2 \cdot w^2}, \quad (206)$$

auf die das obige Korrelationsmaß R bezogen wird. Es ergibt sich dann ein Korrelationsfaktor

$$r = \frac{R}{k} = \frac{v \cdot w}{\sqrt{v^2 \cdot w^2}} = \frac{\overline{v \cdot w}}{v_{\text{eff}} \cdot w_{\text{eff}}}, \quad (207)$$

der bei vollkommener Korrelation infolge $v = aw$ und $\overline{v^2} = a^2 \overline{w^2}$ übergeht in

$$r \rightarrow \frac{a \overline{w^2}}{\sqrt{a^2 \overline{w^2} \cdot \overline{w^2}}} = +1 \quad (208)$$

Für eine vollkommene Antikorrelation wird mit

$$v = -aw$$

der Korrelationsfaktor

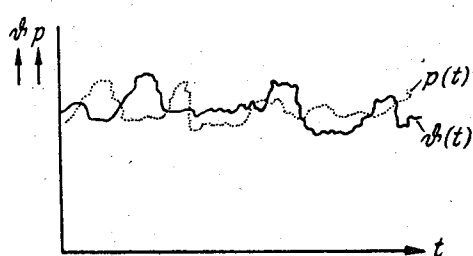
$$r \rightarrow \frac{-a \overline{w^2}}{\sqrt{a^2 \overline{w^2} \cdot \overline{w^2}}} = -1 \quad (209)$$

3. Korrelation zwischen stetigen Funktionen. In vielen Fällen ergeben sich korrelierte Meßreihen nicht wie bisher aus einer statistischen Vielzahl von diskreten Meßpunkten $P(x,y)$, sondern als stetig verlaufende Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$. Dabei entsprechen

$$f_1(t) \hat{=} v \quad \text{und} \quad f_2(t) \hat{=} w$$

1) Bei einer sehr großen Anzahl von Meßwerten ist das immer der Fall.

Insbesondere ist dies bei der Verwendung von schreibenden Geräten der Fall. So kann z.B. über eine längere Zeit mit Hilfe eines Thermo-Barografen die Temperatur $\vartheta(t)$ und der Barometerstand $p(t)$ registriert werden (Bild 51). Besteht zwischen diesen beiden



Funktionen

$$f_1(t) = \vartheta$$

$$f_2(t) = p$$

eine Korrelation, so läßt sich ein Korrelationsfaktor durch Bildung des (zeitlichen) Mittelwertes

Bild 51
Aufzeichnung von Luftdruck und Temperatur durch schreibende Geräte

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \quad (210)$$

und des Effektivwertes

$$f_{1,2}(t)_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_{1,2}^2(t) dt} \quad (211)$$

in der dem Ausdruck (207) entsprechenden Form

$$r = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) \cdot f_2(t) dt}{f_{1(t)}_{\text{eff}} \cdot f_{2(t)}_{\text{eff}}} \quad (212)$$

festlegen. Dieser Korrelationsfaktor r ist konstant, also nicht mehr von der Zeit abhängig. Die hierbei ausgeführte Normierung ist bei stetig mit der Zeit verlaufenden Funktionen nicht üblich, so daß die Korrelation auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$R' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \overline{f_1(t) \cdot f_2(t)} \quad (213)$$

4. Typische Korrelationsfunktionen. Oftmals sind die beiden Meßreihen nicht zu gleichen Zeitpunkten korreliert, d.h., eine Meßreihe f_1 korreliert zum Zeitpunkt $t_1 = t$ mit einer Meßreihe f_2 zur Zeit $t_2 = t - \tau$ (z.B. Retardierung bei der Ausbreitung

von em-Wellen oder anderen Laufzeitvorgängen).

Die Korrelation wird in diesen Fällen eine Funktion der Zeitdifferenz τ , und es folgt die Kreuz-Korrelationsfunktion (KKF)

$$\psi_k(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) \cdot f_2(t - \tau) dt \quad (214)$$

Die Einführung der Zeitdifferenz τ ermöglicht nunmehr auch die Definition der Korrelation einer einzigen Zeitfunktion mit sich selbst (Auto-Korrelation), indem man die Korrelation von $f(t)$ mit einem zeitlich verschobenen Funktionswert $f(t - \tau)$ betrachtet. Wir definieren daher die Auto-Korrelationsfunktion (AKF) entsprechend (214) sinngemäß durch

$$\psi_a(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot f(t - \tau) dt \quad (215)$$

In der Mathematik wird diese Beziehung auch als Faltungsintegral bezeichnet.

Für zeitlich begrenzte Vorgänge ist stets $\psi_a(\tau) = 0$. Die Auto-Korrelation läßt sich bevorzugt anwenden bei physikalischen Schwankungserscheinungen, wie beispielsweise dem Schrotrauschen, bei Dichteschwankungen, und überall dort, wo gewisse Nachwirkungen auftreten. Bei Rauschvorgängen ist die Auto-Korrelation i.allg.nur in der Nähe von $\tau = 0$ verschieden von null. Für $\tau = 0$ wird $\psi_a = 1$, da die Funktion zum gleichen Zeitpunkt t mit sich selbst vollkommen korreliert ist. Für große Werte von τ besteht keine Korrelation der elementaren Rauschvorgänge mehr, so daß auch die Auto-Korrelation $\psi_a(\tau)$ verschwindet (vgl. Bild 52). Je kürzer also die

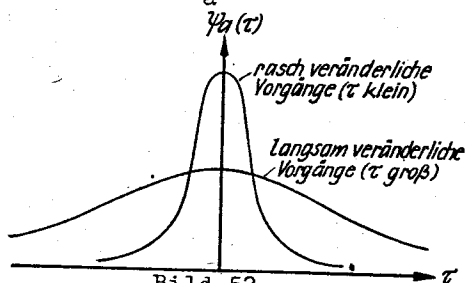


Bild 52
Verhalten der Auto-Korrelation bei verschiedenen Werten von τ

Zeitdauer eines Elementarvorganges ist (z.B. Elektronenübergang von Katode zur Anode), desto kleiner ist der τ -Bereich, in dem $\psi_a(\tau)$ verschieden von null ist (Bild 52). Die obige Gleichung (215) läßt sich nicht nur auf statistische (Rausch-) Größen, sondern auch auf analytische Funktionen anwenden. Daraus ergibt sich die

Möglichkeit einer Funktional-Transformation: Wählt man z.B. den Ansatz

$$f(t) = a \sin (\omega t + \varphi), \quad (216)$$

so folgt gemäß (215)

$$\psi_a(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_{-T}^{+T} \sin (\omega t + \varphi) \sin [\omega (t - \tau) + \varphi] dt$$

Mit den Formeln

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

kann man dafür auch schreiben

$$\psi_a(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{4T} \int_{-T}^{+T} [\cos \omega \tau - \cos (2 \omega t + 2\varphi - \omega \tau)] dt$$

Da der 2. Summand für $T \rightarrow \infty$ keinen Beitrag zum Integral gibt, wird schließlich

$$\psi_a(\tau) = \frac{a^2 \cos \omega \tau \cdot (2 T)}{4 T} = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau \quad (217)$$

Hätte man anstelle des negativen Vorzeichens von τ in

$$\psi_a(\tau) = \overline{f(t) \cdot f(t - \tau)}$$

das positive Vorzeichen, also

$$\psi_a(\tau) = \overline{f(t) \cdot f(t + \tau)}$$

gewählt, so würde sich mit dem Ansatz (216) ebenfalls wieder

$$\psi_a(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos (-\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \tau$$

ergeben. Es ist also stets

$$\psi_a(-\tau) = \psi_a(+\tau), \quad (218)$$

d.h., $\psi_a(\tau)$ ist symmetrisch (vgl. auch Bild 52).

Das obige Resultat (217) würde sich aber auch dann nicht ändern, wenn der Ansatz

$$f(t) = a \cos (\omega t + \varphi) \quad (219)$$

lautete.

Verwendet man nun eine beliebige periodische Zeitfunktion, die nach Fourier als Reihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (n\omega t + \varphi_n) \quad (220)$$

darstellbar ist, so ergibt sich folgende Funktional-Transformation mit $f(t)$ im Oberbereich und $\varphi_a(\tau)$ im Unterbereich:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (n\omega t + \varphi_n) \\ \varphi_a(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2} \cos n\omega\tau \end{array} \right\} \quad (221)$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich hier speziell ein Maximalwert der AKF von

$$\varphi_a(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2}$$

Die Summe ist identisch mit dem Quadrat des Effektivwertes der Zeitfunktion, die das Oberwellenspektrum ausmacht. Die Amplituden der einzelnen Oberwellen klingen mit a_n^2 , also schneller mit wachsendem n ab als die der Fourierreihe.

Die Korrelationsfunktion tritt der Fourier-Transformation und anderen Funktionaltransformationen gleichwertig zur Seite.

In der AKF finden sich alle Frequenzen der Zeitfunktion wieder, allerdings unter Verlust der Phase und damit der daran geknüpften Information. Die AKF ist keine echte Zeitfunktion, wie etwa der Sinusverlauf einer Wechselspannung, sondern nur eine Funktion des „Geräteparameters“ τ , mit dem etwa die AKF gemessen werden kann.

Dimensionsgemäß ist τ natürlich eine Zeit, und zwar eine Lauf- bzw. Verzögerungszeit, die durch apparative Konstanten gegeben und in einem gewissen Bereich veränderbar ist.

5. Grundsätzliches über die Anwendung von Korrelationsfunktionen.

Wir betrachten noch einmal den Ausdruck (214) für die Auto-Korrelation: Es sei $f_1(t)$ eine rein periodische Funktion der Frequenz ω_1 (wie etwa die elektrische Feldstärke an einem Empfänger) und $f_2(t - \tau)$ ein statistisch schwankender Rauschvorgang. Besitzt diese zweite Funktion nun keinen Anteil der Frequenz ω_1 , so muß

$$\psi_k(\tau) = 0$$

werden, da überhaupt keine Korrelation zwischen beiden Funktionen besteht. Das ergibt sich auch aus einer Betrachtung über die Scheinleistung von Strömen verschiedener Frequenz und Phasenlage, die ja bekanntlich gleich Null sein muß. Setzt man z.B.

$$f_1(t) = \sin \omega_1 t$$

und

$$f_2(t) = \sin \omega_2 (t - \tau),$$

wobei $\omega_1 \neq \omega_2$ gelten soll, so folgt

$$\begin{aligned} f_1(t) \cdot f_2(t - \tau) &= \frac{1}{2} \cos (\omega_1 t - \omega_2 t + \omega_2 \tau) - \cos (\omega_1 t + \omega_2 t - \omega_2 \tau) \\ &= \frac{1}{2} \cos (\Omega_1 t + \alpha) - \cos (\Omega_2 t - \alpha), \end{aligned}$$

wenn

$$\omega_1 - \omega_2 = \Omega_1$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \Omega_2$$

$$\alpha = \omega_2 \tau$$

gesetzt wird. Man sieht sofort, daß das nach (214) zu bildende Integral in den angegebenen Grenzen für $T \rightarrow \infty$ verschwindet. Enthält jedoch $f_2(t)$ die Frequenz ω_1 als Partialschwingung (Oberwelle), so tritt im Integral der Term

$$\sin \omega_1 t \cdot \sin (\omega_1 t - \omega_1 \tau) = \frac{1}{2} [\cos \omega_1 \tau - \cos (2 \omega_1 t - \omega_1 \tau)]$$

auf. Da dieser das konstante Glied

$$\frac{\cos \omega_1 \tau}{2}$$

enthält. führt die Integration auf einen von null verschiedenen Wert.

Mit Hilfe der Kreuzkorrelation kann also untersucht werden, ob in einer vorgegebenen Zeitfunktion, z.B. Rauschpegel mit überlagertem Signal, eine bestimmte Frequenz ω_1 enthalten ist. Zu diesem Zweck bildet man durch eine noch zu beschreibende Meßapparatur die Kreuzkorrelation der zu untersuchenden Funktion und einer Sinusfunktion der Frequenz ω_1 . Ist die Frequenz ω_1 in der zu untersuchenden Funktion nicht enthalten, so wird die KKF für jedes τ gleich null. Ist sie dagegen enthalten, so verschwindet die KKF nicht überall. Wichtiger ist jedoch das allgemeinere Problem, festzustellen, ob in einem Signal-Rausch-Gemisch überhaupt Periodizitäten vorhanden sind und welche Frequenzen ihnen zukommen. Theoretisch ist diese Frage natürlich mit einem „Spektrometer“ zu lösen, d.h., man läßt das Gemisch eine Reihe von Filtern mit kontinuierlich veränderlichem Durchlaßbereich passieren und registriert den Ausgang. Dieses Verfahren ist aber elektrisch bei weitem nicht mit der Präzision durchführbar wie auf optischem Gebiet (Prisma, Gitterspektroskopie), da genügend enge Filter, noch dazu in einem kontinuierlichen Frequenzbereich, nicht verfügbar sind.

Mit Hilfe der AKF läßt sich diese Aufgabe jedoch leicht lösen. Es zeigt sich nämlich, daß die in $f(t)$ enthaltenen Frequenzen auch in der AKF als Periodizitäten erscheinen. So stellt z.B. die Kur-

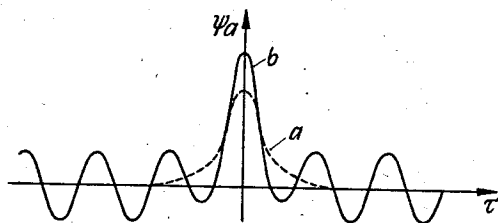


Bild 53
Auto-Korrelationsfunktion eines von Rauschstörungen überlagerten sinusförmigen Signals
Kurve a: AKF ohne Periodizitäten
Kurve b: AKF mit überlagerten Periodizitäten

ve a im Bild 53 die AKF einer inkohärenten Zeitfunktion (etwa einen Rauschvorgang) ohne Überlagerung von periodischen Gliedern dar. Tritt nun ein sinusförmiges Signal hinzu, so entsteht als AKF die im Bild 53 angegebene Kurve b. Da in diesem Fall

$$\psi_a = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau + \text{nichtperiodischer Teil}$$

wird, hat die AKF in der Tat die gleiche Periodizität ω wie die Zeitfunktion $f(t)$, von der ausgegangen wurde.

6. Experimentelle Methoden zur Aufnahme von Korrelationsfunktionen. Eine experimentelle Anordnung zur Aufnahme von Korrelationsfunktionen ist der Korrelatograf oder Korrelator, dessen Blockschema Bild 54 zeigt. Im einzelnen besteht eine solche Apparatur aus folgenden Gliedern:

a) Speicher: Die zu korrelierenden Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ müssen als $U(t)$ -Verlauf jederzeit verfügbar sein, damit sie zur Bildung des Korrelatogrammes beliebig oft abspielbar sind.

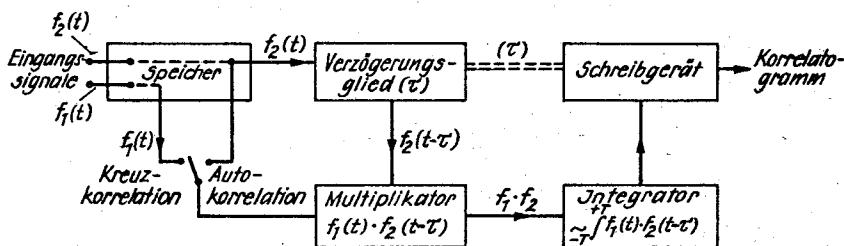


Bild 54
Funktioneller Aufbau eines Korrelatografen

Für akustische Verhältnisse leistet das Magnettonband gute Dienste. Spezielle Speicher für das HF-Gebiet befinden sich noch in der Entwicklung.

b) Verzögerungsglied: Mittels eines Magnettonbandes, akustischer Verzögerungsleitungen oder einer Laufzeitkette wird eine regelbare Verzögerung τ zwischen den beiden Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ erreicht (Kreuzkorrelation). Natürlich läßt sich ebenso zu nur einer einzigen Funktion $f(t)$ ein um die Verzögerungszeit τ verspäteter Ablauf herstellen (Autokorrelation). Problematisch ist dabei, daß zur Aufnahme einer Korrelationsfunktion etwa 100...200 einzelne Verzögerungszeiten τ genau eingestellt werden müssen. Speicher und Verzögerungsglied können bei Benutzung eines Tonbandgerätes zusammengefaßt werden.

c) Multiplikator: Die verzögerte Funktion $f_2(t - \tau)$ und die unverzögerte Funktion $f_1(t)$ müssen gemäß (214) bzw. (215) miteinander multipliziert werden. Grundsätzlich eignen sich hierzu sowohl Digital- wie auch Analogrechner. Da die Korrelationsfunktion eine Wahrscheinlichkeitsgröße ist, also keine extrem große Genauigkeit angestrebt wird, genügt die wesentlich einfachere Analog-Methode.

Zum Beispiel geht man aus von der Identität

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Danach besteht zunächst die Aufgabe der Summen- und Differenzbildung der beiden Eingangsgrößen $x = f(t)$ und $y = f(t - \tau)$. Für mittlere Frequenzen geschieht dies am einfachsten durch entsprechendes Zusammenschalten der Sekundärwicklungen von Übertragern (Transformatoren). Die darauf folgende Quadrierung erfordert ein Gerät mit parabolischer Kennlinie. Diese muß im ersten und zweiten Quadranten spiegelsymmetrisch verlaufen (Bild 55), damit auch negative Eingangsspannungen quadriert werden können.

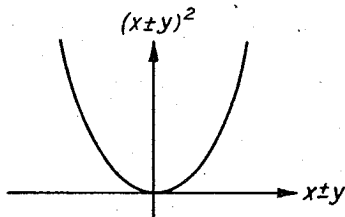


Bild 55
Ideale Kennlinie einer
Quadrierschaltung

Hier bestehen größere Schwierigkeiten. Am aussichtsreichsten dürfte das Verfahren von Nowoselzew sein, das einen aus mehreren Widerständen und Ge-Ventilen zusammengesetzten Vierpol verwendet. Die parabolische Kennlinie wird dabei durch einen Sehnenzug angenähert. Die Schaltung beruht darauf, daß mit steigender Eingangsspannung die Dioden nacheinander abgeschaltet werden, so daß

sich der Übertragungsfaktor des Vierpoles jeweils sprunghaft ändert.

d) Integrator: Für die Integration stehen einfache und genau arbeitende Schaltungen zur Verfügung. Als Beispiel sei hier der Miller-Integrator genannt, dessen Arbeitsweise kurz beschrieben werden soll: Die Eingangsspannung eines Verstärkers mit sehr großer Verstärkung wird praktisch konstant gehalten, so daß der durch die Eingangsspannung U_1 verursachte Strom ausschließlich durch den Widerstand R bestimmt wird (Bild 56). Da der Verstärker-

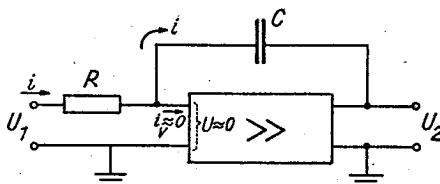


Bild 56
Schema des Miller-Integrators

eingang keinen Strom aufnehmen kann, muß dieser im wesentlichen durch den Kondensator C fließen. Dessen Spannung U_C und damit auch die Ausgangsspannung U_2 des Gerätes verlaufen daher nach der

Beziehung

$$U_2 \approx U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{RC} \int U_1 dt$$

Die Ausgangsspannung U_2 ist also tatsächlich proportional dem Integral der Eingangsspannung.

e) Anzeigegerät: Hierzu kann jedes Schreibgerät verwendet werden. Die gesamte Arbeitsweise des Korrelatografen ist weitgehend automatisiert. Die Verzögerungszeit τ wird jeweils eingestellt und über eine gewisse Zeit die Korrelationsgröße $\psi(\tau)$ gemessen, indem durch die Integration der Mittelwert festgestellt wird. Das Ergebnis ist dann ein Punkt im Korrelatogramm. Durch weitere Messungen mit anderen τ -Werten ergibt sich schließlich das gesamte, aus Einzelpunkten zusammengesetzte Korrelatogramm. Ihrer Definition entsprechend läßt sich die Korrelationsfunktion nur von stationären Zeitfunktionen bestimmen, denn die Beobachtungsdauer (= Integrationszeit) soll ja streng genommen unendlich groß sein. Einmalig verlaufende Vorgänge (z.B. Rechteckimpuls) lassen sich daher nicht hinsichtlich Korrelation untersuchen.

Selbstverständlich läßt sich die Forderung $\lim T \rightarrow \infty$ mit guter Näherung schon dann erfüllen, wenn die Integrationszeit groß ist gegenüber allen im betrachteten Verlauf enthaltenen Schwingungsdauern.

7. Zusammenhang der Korrelationsfunktion mit der spektralen Verteilung der Rauschleistung. Wir gehen aus von der Fourier-Transformation

$$\begin{array}{l} \circ \\ | \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{array} \quad (222a)$$

$$\begin{array}{l} | \\ A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{array} \quad (223a)$$

Da der Ausdruck $f(t) dt$ in (223a) stets reell ist, läßt sich bei Anwendung der Eulerschen Beziehung

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

für die Unterfunktion, also für die Fouriertransformierte zu $f(t)$, auch schreiben

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{A(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{B(\omega)} \\ &= A(\omega) - j B(\omega) \end{aligned} \quad (224)$$

Da $A(\omega)$ nur cos-Glieder und $B(\omega)$ nur sin-Glieder enthält, gilt

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A(-\omega) && \text{gerade Funktion} \\ B(\omega) &= -B(-\omega) && \text{ungerade Funktion} \\ B(0) &= 0 \end{aligned}$$

Schematisch ergibt sich also der im Bild 57 dargestellte Verlauf.

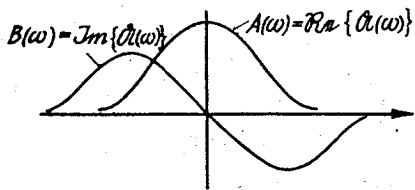


Bild 57

Verlauf von Real- und Imaginäranteil der Fouriertransformierten

Der Betrag der Unterfunktion (223a) ist natürlich auch eine gerade Funktion, denn es gilt

$$|\alpha(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (225)$$

Die konjugiert komplexe Größe zu $\alpha(\omega)$ wird

$$\begin{aligned} \alpha^*(\omega) &= A(\omega) + j B(\omega) = A(-\omega) - j B(-\omega), \\ \text{also} \end{aligned}$$

$$\alpha^*(\omega) = \alpha(-\omega) \quad (226)$$

Da gemäß (222a) das Produkt $\alpha(\omega)e^{j\omega t}$ reell sein muß, besteht zwischen dem Phasenwinkel der Unterfunktion $\alpha(\omega)$ und dem von $e^{j\omega t}$ die Beziehung

$$\angle \alpha(\omega) + \angle e^{j\omega t} = \varphi + \omega t = 0$$

Durch Vertauschen der Richtungen von α und $e^{j\omega t}$, also durch beiderseitige Bildung der konjugiert komplexen Zeigergrößen, folgt somit

$$\alpha(\omega) \cdot e^{j\omega t} = \alpha^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t},$$

und für die Transformationsgleichung (222a) läßt sich schreiben

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (222b)$$

Ebenso ergibt der beiderseitige Übergang zu konjugiert komplexen Größen für die zweite Transformationsgleichung (223a) den Ausdruck

$$\alpha^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+j\omega t} dt, \quad (223b)$$

wodurch eine weitere Darstellung der Fouriertransformation gegeben ist.

Ein Maß für das nunmehr zu untersuchende Leistungsspektrum ist das Quadrat des Effektivwertes

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt \quad (227)$$

Mit Hilfe von (222a) läßt sich dieser Ausdruck wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} \overline{f(t)^2} &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) a(\omega) e^{j\omega t} dt d\omega \end{aligned}$$

Da die Reihenfolge der Integration vertauschbar ist, kann hierfür auch geschrieben werden

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \cdot a(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{j\omega t} dt,$$

so daß sich bei Berücksichtigung von (223b)

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cdot a^*(\omega) \cdot d\omega$$

ergibt. Mit $a \cdot a^* = |a|^2$ und $\omega = 2\pi f$ folgt hieraus das Parseval-Theorem

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 df \quad (228)$$

Für ein kleines Frequenzintervall ergab sich nun aus früheren Betrachtungen, z.B. für das Nyquist-Rauschen, ein Quadrat des effektiven Rauschstromanteils gemäß (155) zu

$$J_{\text{eff}}^2 = \Delta J^2 = \frac{4kT}{R} df = G(\omega) df$$

Durch Integration über den gesamten Frequenzbereich $0 \leq f \leq \infty^1$ folgt hieraus ein Maß für den Effektivwert des gesamten Rauschstromes, das mit der oben berechneten Größe $f(t)^2$ identisch ist:

$$\overline{J^2} = \overline{f(t)^2} = \int_0^{\infty} G(\omega) df \quad (229a)$$

1) Hierbei sind die negativen Frequenzen $-\infty \leq f \leq 0$ schon durch einen Faktor 2 berücksichtigt.

Man bezeichnet die Funktion $G(\omega)$ als Leistungsspektrum. Sie repräsentiert den Leistungsanteil, der in das Frequenzintervall 1 s^{-1} fällt. Der Widerstand wird meistens $R = 1$ gesetzt, so daß die Quadrate des Effektivwertes von Strom oder Spannung gemäß

$$P = R \overline{J^2} = \frac{1}{R} \overline{U^2}$$

allein als Repräsentanten der Leistung angesehen werden können. Allerdings bleibt dabei die Dimension von $[R] = [\Omega]$ unberücksichtigt. Führt man durch Beifügung des Faktors $1/2$ wieder negative Frequenzen ein, so ändern sich die Integrationsgrenzen in (229a)

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega, \quad (229b)$$

und es wird folgender Vergleich mit der Parseval-Beziehung (228) möglich:

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega$$

Es ergibt sich also der Zusammenhang

$$G(\omega) = \frac{1}{T} |a(\omega)|^2 \quad (230)$$

Eine einfache und wichtige Beziehung zum Leistungsspektrum $G(\omega)$ läßt sich gewinnen, wenn wir anstelle der allgemeinen Zeitfunktion $f(t)$ nunmehr speziell die Auto-Korrelationsfunktion $\psi(\tau)$ einsetzen. Wir bilden also zunächst die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}$ der Funktion $\psi(\tau)$.

Mit (223a) ergibt sich

$$\mathcal{F}\{\psi(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \psi(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (231)$$

Setzt man für $\psi(\tau)$ laut Definition

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot f(t-\tau) dt$$

ein, so folgt weiter:

$$\mathcal{F}\{\psi(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(t) f(t-\tau) e^{-j\omega\tau}$$

oder, wenn man den Integranden mit

$$1 = e^{j\omega t} e^{-j\omega t}$$

multipliziert,

$$\mathcal{F}\{\psi(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-j\omega t} f(t-\tau) e^{j\omega(t-\tau)}$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Integration und führt zur besseren Übersicht die Variable

$$t - \tau = s \quad (\text{oder} \quad -d\tau = ds)$$

ein, so kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\psi(\tau)\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t-\tau) e^{j\omega(t-\tau)} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{j\omega s} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (223a,b) zeigt, daß die beiden hier vorkommenden Integrale mit den Fouriertransformierten der Zeitfunktion $f(t)$ identisch sind. Das erste Integral ist das Amplitudenspektrum $\alpha(\omega)$ und das zweite Integral der dazugehörige konjugiert komplexe Wert $\alpha^*(\omega)$.

Als Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion ergibt sich also der Ausdruck

$$\mathcal{F}\{\psi(\tau)\} = \frac{1}{2T} \alpha \cdot \alpha^* = \frac{1}{2T} |\alpha|^2, \quad (232)$$

der mit dem Leistungsspektrum (230) wie folgt zusammenhängt:

$$G(\omega) = 2 \mathcal{F}\{\psi(\tau)\} \quad (233a)$$

Dabei war $G(\omega)$ nur für positive Frequenzen definiert. Der Faktor 2 läßt sich einfach beseitigen, wenn man die Beziehung

$$G(\omega) = 2 S(\omega)$$

einführt. $S(\omega)$ ist hierbei eine auch für negative Frequenzen gültige Funktion. Mit (233a) folgt jetzt der Zusammenhang

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{\psi(\tau)\}, \quad (233b)$$

der besagt, daß das Leistungsspektrum $S(\omega)$ die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion $\psi(\tau)$ ist. Man nennt diesen Zusammenhang auch das Theorem von Wiener und Khintchine.

Da bekanntlich jede Fouriertransformation umkehrbar ist, gibt es natürlich auch eine dazugehörige Reziprokbeziehung, die besagt, daß die Fouriertransformierte des Leistungsspektrums $S(\omega)$ gleich der Korrelationsfunktion $\psi(\tau)$ ist (Umkehrsatz von Wiener).

Man kann also wechselseitig nach dem Schema

$$\left. \begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (234a,b)$$

aus dem Leistungsspektrum die Korrelationsfunktion und umgekehrt aus der Korrelationsfunktion das Leistungsspektrum berechnen.

Setzt man nach Euler

$$e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau$$

und berücksichtigt, daß sich die Sinusglieder bei der Summierung von $-\infty$ bis $+\infty$ paarweise aufheben, so lautet Gleichung (234a) in Übereinstimmung damit, daß die Korrelationsfunktion - wie natürlich auch die Spektralfunktion $S(\omega)$ - stets reell sein muß,

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

Da wir uns wegen der Symmetrie zur Frequenz 0 auf das halbe Integrationsintervall beschränken können, läßt sich jetzt auch schreiben

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

oder, mit $G(\omega) = 2 S(\omega)$ und $d\omega = 2 \pi df$,

$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau df \quad (235)$$

Ohne Kenntnis der zugrunde liegenden Zeitfunktion $f(t)$ kann hieraus die Korrelationsfunktion berechnet werden, wenn das aus dem Elementarprozeß ableitbare Leistungsspektrum bekannt ist.

Für $\tau = 0$ ergibt sich aus (235)

$$\psi(0) = \int_0^{\infty} G(\omega) df$$

Im Falle des früher besprochenen „Weißen Rauschens“ gilt

$$G(\omega) = \text{konst} = G_0$$

Hieraus folgt aber, daß die Korrelationsfunktion für alle Werte $\tau \neq 0$ verschwindet. Bei $\tau = 0$ hat sie dagegen einen Wert

$$\psi(0) = G_0 \int_0^{\infty} df = \infty,$$

dem ein unendlich großer Effektivwert des Rauschstromes entsprechen würde, wenn die Frequenzunabhängigkeit des Rauschens nicht nach oben hin begrenzt wäre.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
2. Kapitel: Statistik und Rauschen	61
10 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	61
1. Das Wesen von Schwankungserscheinungen	61
2. Einige Grundbegriffe der mathematischen Statistik	62
3. Die Bernoulliverteilung	63
4. Bildung von Mittelwerten	67
5. Das Quadrat der relativen Schwankung	70
6. Die Poissonverteilung	73
7. Die Gaußverteilung	75
8. Übergang zu stetigen Variablen	77
9. Zusammenstellung der Verteilungsformeln	79
11 Schwankungserscheinungen in der Elektrotechnik (Rauschen)	79
1. Rauschspektrum des Elementarvorganges	79
2. Rauschstrom des Elementarvorganges	81
3. Nyquist-Rauschen (Johnsoneffekt)	83
4. Der Schroteffekt (Schottky)	86
5. Rauschverhalten von Dioden unter Berücksichtigung der Kennlinie	89
6. Stromverteilungsrauschen	92
7. Funkeffekt	95
8. Rauschen von Gasentladungen (Niederdruck-Plasma)	95
9. Rauschen von Halbleitern	98
10. Zur Meßtechnik des Rauschens	101
12 Korrelation von Schwankungen	102
1. Das Wesen der Korrelation	102
2. Quantitative Kennzeichnung der Korrelation	103
3. Korrelation zwischen stetigen Funktionen	106
4. Typische Korrelationsfunktionen	107
5. Grundsätzliches über die Anwendung von Korrelationsfunktionen	111
6. Experimentelle Methoden zur Aufnahme von Korrelationsfunktionen	113
7. Zusammenhang der Korrelationsfunktion mit der spektralen Verteilung der Rauschleistung	115